§10 Bottperiodizität

10.1 Lemma: Sei $\hat{T} := C^*(\tilde v, \tilde w) \subseteq \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ nuklear), $\tilde v := v \otimes 1$, $\tilde w := (1 - vv^*) \otimes v$.

(a) $\hat T = C^*(\mathcal{K} \otimes \mathcal{T}, \mathcal{T} \otimes 1)$

(b) $\mathcal{K} \otimes \mathcal{T} \lhd \hat T$, $\hat T / \mathcal{K} \otimes \mathcal{T} \cong C(S^1)$, $\tilde w \mapsto 0$, $\tilde v \mapsto \mathrm{id}_{S^1} (= u)$

Bew: (a) $\mathcal{K} \cong \overline{\mathrm{span}}\{ v^k (1 - vv^*) v^{*l} \mid k, l \in \mathbb{N}_0 \} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \tilde v, \tilde w \in C^*(\mathcal{K} \otimes \mathcal{T}, \mathcal{T} \otimes 1)$

Umgekehrt $\mathcal{T} \otimes 1 = C^*(\tilde v) \subseteq C^*(\tilde v, \tilde w)$ und

$\underbrace{\mathcal{K} \otimes \mathcal{T} \cong \overline{\mathrm{span}}\{ v^k (1 - vv^*) v^{*l} \otimes x \mid k, l \in \mathbb{N}_0, x \in \mathcal{T} \}}_{=: \mathcal{J}} \subseteq C^*(\tilde v, \tilde w)$

da $C^*(\tilde w) = (1 - vv^*) \otimes \mathcal{T}$

(b) $\tilde v \mathcal{J}, \tilde v^* \mathcal{J}, \tilde w \mathcal{J}, \tilde w^* \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \mathcal{J} \lhd \hat T$

Außerdem $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{T} \to C(S^1) \to 0$ exakt

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{K} \otimes \mathcal{T} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \arrow[r, "\tilde\pi"] & C(S^1) \otimes \mathcal{T} \arrow[r] & 0 \quad \text{exakt} \\ & \mathcal{K} \otimes \mathcal{T} \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] & \hat T \arrow[u, phantom, "\cup"] & & \end{tikzcd}$$

$\tilde\pi(v \otimes 1) = u \otimes 1$

$\tilde\pi((1 - vv^*) \otimes 1) = 0$

$\Rightarrow \hat T / \mathcal{K} \otimes \mathcal{T} \cong \tilde\pi(\hat T) = C^*(u \otimes 1) \cong C(S^1)$ □

10.2 Lemma: $E := \{ (x, y) \mid \pi(x) = \tau(y) \} \subseteq \hat T \oplus \mathcal{T}$ C^*-Unteralgebra via Pullback.

$\pi : \hat T \to C(S^1)$, $\tilde w \mapsto 0$, $\tilde v \mapsto u$; $\quad \tau : \mathcal{T} \to C(S^1)$, $v \mapsto u$,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \hat T \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{T} \arrow[r, "\tau"] & C(S^1) \end{tikzcd}$$

(a) Dann $0 \to \mathcal{K} \otimes \mathcal{T} \xrightarrow{\iota} E \underset{\alpha}{\overset{\sigma}{\rightleftarrows}} \mathcal{T} \to 0$ zerfallend

$(\tilde v, v) \overset{\alpha}{\leftarrow} v$, $(x, y) \overset{\sigma}{\mapsto} y$, $x \mapsto (x, 0)$

(b) ~~$0 \to K_0(\mathcal{K} \otimes \mathcal{T}) \to K_0(E)$~~ liefert $K_0(\omega) : K_0(\mathcal{T}) \to K_0(E)$ injektiv

$\omega : \mathcal{T} \to E$, $v \mapsto (\tilde w, 0)$

Bew: (a) π ist die Abb. aus 10.1, also Kern $\pi = \mathcal{K} \otimes \mathcal{T}$, d.h. ι ex. & inj.

σ surj.: $(\tilde v, v) \in E$ da $\pi(\tilde v) = u = \tau(v)$ und $\sigma(\tilde v, v) = v$, also $\sigma(\tilde y, y) = y$.

α ex.: $(\tilde v, v) \in E$ Isometrie

$\sigma \circ \alpha = \mathrm{id}_{\mathcal{T}}$: $\sigma \circ \alpha(v) = \sigma(\tilde v, v) = v$

Kern σ = Bild ι: $\sigma(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ und $\pi(x) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ & $x \in \mathcal{K} \otimes \mathcal{T}$

(b)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_0(\mathcal{K} \otimes \mathcal{T}) \arrow[r] & K_0(E) \arrow[r, shift left] & K_0(\mathcal{T}) \arrow[l, shift left] \arrow[r] & 0 \\ & K_0(\mathcal{T}) \arrow[u, "K_0(\gamma)"] \arrow[ur, "K_0(\omega)"'] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\circlearrowleft"] & & & \end{tikzcd}$$
zerfallend ((a) & 6.7), $\gamma(v) = \tilde w$ Isometrie in $C^*(\tilde w)$

$K_0(\gamma)$ Isomorphismus nach 5.7, also $K_0(\omega)$ injektiv □

<u>10.3 Lemma:</u> Für $\psi_0 : J \to E$, $v \mapsto (\tilde v \tilde v \tilde v^* + \tilde w, v)$

und $\psi_1 : J \to E$, $v \mapsto (\tilde v \tilde v \tilde v^* + (1 - \tilde v \tilde v^*), v)$ gilt:

(a) ψ_0, ψ_1 wohldef.

(b) $\psi_0 = \psi + \omega$, $\psi_1 = \psi + \omega \circ j \circ k$

für $\psi : J \to E$, $v \mapsto (\tilde v \tilde v \tilde v^*, v)$, $j : \mathbb{C} \to J$, $\lambda \mapsto \lambda 1$, $k : J \to \mathbb{C}$, $v \mapsto 1$

(c) $\psi_0 \sim_h \psi_1$

<u>Bew:</u> (a) $(\tilde v \tilde v \tilde v^* + \tilde w)^* (\tilde v \tilde v \tilde v^* + \tilde w) = \tilde v \tilde v^* + \tilde w^* \tilde v \tilde v \tilde v^* + \tilde v \tilde v^* \tilde v^* \tilde w + \tilde w^* \tilde w$
$= vv^* \otimes 1 + 0 + 0 + (1 - vv^*) \otimes v^* v = 1 \otimes 1$

$(\tilde v \tilde v \tilde v^* + (1 - \tilde v \tilde v^*))^* (\tilde v \tilde v \tilde v^* + (1 - \tilde v \tilde v^*)) = \tilde v \tilde v^* + 0 + 0 + (1 - \tilde v \tilde v^*) = 1 \otimes 1$

$\pi(\tilde v \tilde v \tilde v^*) = uuu^* = u = \tau(v)$, $\pi(\tilde w) = \pi(1 - v \tilde v^*) = 0$, d.h. ψ_0, ψ_1 nach E.

(b) $(\psi + \omega)(v) = (\tilde v \tilde v \tilde v^* + \tilde w, v) = \psi_0(v)$

$(\psi + \omega \circ j \circ k)(v) = (v \tilde v \tilde v^*, v) + \omega(1) = (\tilde v \tilde v \tilde v^*, v) + (1 - vv^*) \otimes 1$
$= \psi_1(v)$

$\psi \cdot \omega = \omega \cdot \psi = 0$, d.h. $\psi + \omega$ ist $*$-Hom.

(c) Mit $\tilde\delta := (1 - vv^*) \otimes (1 - vv^*) \in \hat{T}$ ist
$\tilde w^* \tilde v = \tilde w \tilde v = \tilde v^* \tilde w = \tilde v^* \tilde w^* = \tilde v^* \tilde\delta = \tilde\delta \tilde v = \tilde w^* \tilde\delta = \tilde\delta \tilde w = 0$

Für $z_0 := \tilde v \tilde v \tilde v^* \tilde v^* + \tilde w \tilde v^* + \tilde v \tilde w^* + \tilde\delta$

und $z_1 := \tilde v \tilde v \tilde v^* \tilde v^* + (1 - \tilde v \tilde v^*) \tilde v^* + \tilde v (1 - \tilde v \tilde v^*)$

ist $z_i = z_i^*$, $z_i^2 = 1 \otimes 1$, denn

$z_0^2 = \tilde v \tilde v \tilde v^* \tilde v^* + \tilde w \tilde w^* + \tilde v \tilde w^* \tilde w \tilde v^* + \tilde\delta$
$= vvv^*v^* \otimes 1 + (1 - vv^*) \otimes vv^* + v(1 - vv^*)v^* \otimes 1 + (1 - vv^*) \otimes (1 - vv^*)$
$= 1 \otimes 1$

$z_1^2 = \tilde v \tilde v \tilde v^* \tilde v^* + (1 - \tilde v \tilde v^*) + \tilde v (1 - \tilde v \tilde v^*) \tilde v^* = 1$

$\Rightarrow$ z_i sind unitär, $\mathrm{Sp}\, z_i \neq S^1$ ~~$\Rightarrow z_0, z_1 \in U_0$~~

$\Rightarrow$ $z_0 \sim_h 1 \sim_h z_1$ per $(z_t)_{t \in [0,1]}$

Setze $\psi_t : J \to E$, $v \mapsto (z_t \tilde v, v)$, $\psi_{t=0} = \psi_0$, $\psi_{t=1} = \psi_1$

denn $z_0 \tilde v = \tilde v \tilde v \tilde v^* + \tilde w$, $z_1 \tilde v = \tilde v \tilde v \tilde v^* + (1 - \tilde v \tilde v^*)$ $\square$

10.4 Lemma: Für $j: \mathbb{C} \to J$, $\lambda \mapsto \lambda 1$, $\quad k: J \to \mathbb{C}$, $v \mapsto 1$, $\quad j\otimes id: A \to J\otimes A$, $a \mapsto 1\otimes a$, $\quad k: J\otimes A \to A$, $v\otimes a \mapsto a$

gilt $K_0(A) \cong K_0(J\otimes A)$, da $K_0(j\otimes id)$, $K_0(k\otimes id)$ invers sind.

Bew: $K_0(k)\circ K_0(j) = K_0(id_{\mathbb{C}}) = id_{K_0(\mathbb{C})}$.

$K_0(\mu)+K_0(\omega) \underset{10.3}{=} K_0(\mu)+K_0(\omega)K_0(j)K_0(k) \quad \overset{K_0(\omega) \text{ inj. } (10.2)}{\Longrightarrow} K_0(j)K_0(k) = id_{K_0(J)}$

Ebenso für $\cdot\otimes id_A$. □

~~10.5 Satz (Bott periodizität): $K_1(S^2A) \cong K_0(A)$~~

~~Bew~~

10.5 Lemma: Die Folge $0 \to \hat{C}A \to J\otimes A \underset{k\otimes id_A}{\overset{j\otimes id_A}{\rightleftarrows}} A \to 0$ zerfällt,

wobei $\hat{C}A := \ker k\otimes id_A$. Außerdem ist

$0 \to K\otimes A \to \hat{C}A \xrightarrow{\gamma} SA \to 0$ exakt

und $K_0(\hat{C}A) = 0$.

Bew: $K_0A \overset{10.4}{\cong} K_0(J\otimes A) \overset{6.7}{=} K_0(\hat{C}A)\oplus K_0A \Rightarrow K_0\hat{C}A = 0$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & & A \arrow[u] \arrow[r, equal] & A \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & K\otimes A \arrow[r] & J\otimes A \arrow[u, "k\otimes id"] \arrow[r, "\tau\otimes id"] \arrow[ur, phantom, "①"] & C(S^1)\otimes A \arrow[u, "ev_1\otimes id"'] \arrow[r] & 0 \\
 & & \hat{C}A \arrow[u, "u"] \arrow[r, two heads, "\gamma \; ③"'] \arrow[ur, phantom, "②"] & C(S^1\setminus\{1\})\otimes A \cong SA \arrow[u, "\delta"'] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

exakt nach 9.4 + 9.7(a)

①: $(ev_1\otimes id)(\tau\otimes id)(v\otimes a) = (ev_1\otimes id)(u\otimes a) = a = (k\otimes id)(v\otimes a)$

②: $x\in\hat{C}A$. Dann $\tau\otimes id_A(x) \in \ker(ev_1\otimes id) = \operatorname{Bild}\delta$

$\quad ((ev_1\otimes id)(\tau\otimes id_A)(x) \overset{①}{=} (k\otimes id)(x) = 0)$

$\quad \Rightarrow \exists!\, y\in SA$ mit $\delta(y) = \tau\otimes id_A(x)$. Setze $\gamma(x) := y$

③ γ surj.: $y\in SA$. Da $\tau\otimes id$ surj., ex. $x\in J\otimes A$ mit $\tau\otimes id(x) = \delta(y)$.

$\quad$ Dann $x\in\hat{C}A$ $\big(k\otimes id(x) = (ev_1\otimes id)(\tau\otimes id)(x) = (ev_1\otimes id)\delta(y) = 0\big)$

$\quad$ und $\gamma(x) = y$.

$\ker\gamma = K\otimes A$: $\quad x\in\ker\gamma \overset{\delta \text{ inj.}}{\iff} x\in\ker\delta\circ\gamma = \ker\tau\otimes id = K\otimes A$ □

10.6 Satz (Bottperiodizität): $K_0(S^2A) \cong K_0(A)$ insbes. $K_1(SA) \cong K_0(A)$

Bew: Nach 8.7: $\underbrace{K_0 S\hat{C}A}_{=0} \to K_0 S^2A \to \underbrace{K_0(\mathcal{K}\otimes A)}_{=K_0A} \to \underbrace{K_0(\hat{C}A)}_{\overset{10.5}{=}0} \to K_0(SA)$ exakt

Es gilt $S\hat{C}A = \hat{C}SA$, also $K_0(S\hat{C}A) \overset{10.5}{\cong} 0$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \hat{C}(SA) & \to & J\otimes(SA) & \to & SA & \to & 0 \quad \text{exakt} \\ & & \cong\uparrow i & & \uparrow\cong & & \| & & \\ 0 & \to & S(\hat{C}A) & \to & S(J\otimes A) & \to & SA & \to & 0 \quad \text{exakt} \end{array}$$

& $K_1(SA) \overset{7.7}{\cong} K_0(S^2A) \cong K_0(A)$

□

10.7 Korollar: $0 \to I \to A \to B \to 0$ exakt

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} K_0 I & \to & K_0 A & \to & K_0 B \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1 B & \leftarrow & K_1 A & \leftarrow & K_1 I \end{array} \quad \text{exakt}$$

"6-Term-Sequenz"

Indexabbildung ∂_1, Exponentialabbildung ∂_0

Bew: $\underbrace{K_0 S^2 I}_{\cong K_0 I} \to \underbrace{K_0 S^2 A}_{\cong K_0 A} \to \underbrace{K_0 S^2 B}_{\cong K_0 B} \to \underbrace{K_0 SI}_{\cong K_1 I} \to \underbrace{K_0 SA}_{\cong K_1 A} \to \underbrace{K_0 SB}_{\cong K_1 B} \to K_0 I \to K_0 A \to K_0 B$

□

10.8 $\boxed{\text{Berechnung:}}$ (a) $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{L}(H) \to \mathcal{Q}(H) \to 0$ exakt

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} \underset{\mathbb{Z}\,\overset{5.8}{\cong}}{K_0 \mathcal{K}} & \to & K_0 \mathcal{L}(H) \overset{5.8}{=} 0 & \to & K_0 \mathcal{Q}(H) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1 \mathcal{Q}(H) & \leftarrow & \underbrace{K_1 \mathcal{L}(H)}_{\overset{7.9}{=}0} & \leftarrow & \underbrace{K_1 \mathcal{K}}_{\overset{7.9}{=}0} \end{array} \quad \text{exakt}$$

$\Rightarrow K_0 \mathcal{Q}(H) = 0$ & $K_1 \mathcal{Q}(H) \cong K_0 \mathcal{K} = \mathbb{Z}$

(b) $K_i J$ $\quad 0 \to S\mathbb{C} \to C(S^1) \rightleftarrows \mathbb{C} \to 0$ zerfallend (vgl. 7.9)

$f \mapsto f(1)$

$\Rightarrow K_i C(S^1) = K_i S\mathbb{C} \oplus K_i \mathbb{C} \overset{7.7\,\&\,10.6}{=} K_{i+1}\mathbb{C} \oplus K_i \mathbb{C} \overset{5.8\,\&\,7.9}{=} \mathbb{Z}$

(c) allgemeiner $0 \to SA \to C(S^1)\otimes A \rightleftarrows A \to 0$ zerfallend

$K_i J$ und $K_i\, C(S^1)\otimes A = K_i A \oplus K_{i+1} A$ $\qquad \mathbb{T}^n := (S^1)^{\times n}$

$\Rightarrow K_i(C(\mathbb{T}^{n+1})) \cong K_i(C(S^1)\otimes C(\mathbb{T}^n)) = K_i C(\mathbb{T}^n) \oplus K_{i+1} C(\mathbb{T}^n)$

$\underset{\text{I.V.}}{=} \mathbb{Z}^{2^{n-1}} \oplus \mathbb{Z}^{2^{n-1}} = \mathbb{Z}^{2^n}$

(c) $K_0 J \overset{10.4}{=} K_0 \mathbb{C} = \mathbb{Z}$, $\quad K_1 J \overset{7.7}{=} K_0(S\otimes J) \overset{10.4}{=} K_0(S) \overset{7.7}{=} K_1(\mathbb{C}) = 0$

10.9 Bemerkung: Die topologischen Räume

$$S^1 = \bigcirc \;,\; [0,1] = \vdash\!\!\dashv \;,\; [0,1) = \vdash\!\!\rightarrow \;,\; (0,1) = (\!-\!)$$

Sind verschieden. Auch ihre C^*-Algebren?

	$C(S^1)$	$C[0,1]$	$C_0[0,1)$	$C_0(0,1) = S\mathbb{C}$
K_0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0
K_1	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$
	(10.8)	(4.7)	(4.7)	(7.7, 10.6)

10.10 $\boxed{\text{Berechnung:}}$ (a) $SA \cong C_0(\mathbb{R}, A)$, da $(0,1) \cong \mathbb{R}$ homöomorph

(beachte: $\varphi : X \xrightarrow{\cong} Y$ Homöomorphismus $\Rightarrow$ $C(Y) \xrightarrow{\cong} C(X)$ Isom.)
$$f \longmapsto f \circ \varphi$$

Und $C_0(\mathbb{R}^{n+1}) \cong C_0(\mathbb{R}, C_0(\mathbb{R}^n)) \underset{\text{I.Vor.}}{\cong} C_0(\mathbb{R}, S^n\mathbb{C}) \cong S^{n+1}\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $K_i\, C_0(\mathbb{R}^n) \cong K_i(S^n\mathbb{C}) \underset{\substack{7.7 \\ \& 10.6}}{\cong} K_{i+n}(\mathbb{C}) =$

$\Rightarrow$ $K_0\, C_0(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$, $\quad K_1\, C_0(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & n \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$. Ein-Punkt-Kompaktifizierung $\widehat{\mathbb{R}^n}$ homöomorph zu S^n. Also $\widetilde{C_0(\mathbb{R}^n)} \cong C(S^n)$

$\Rightarrow$ $K_i\, C(S^n) = K_i\, \widetilde{C_0(\mathbb{R}^n)} = K_i\, C_0(\mathbb{R}^n) \oplus K_i\, \mathbb{C}$

$\left(0 \to A \to \tilde{A} \rightleftarrows \mathbb{C} \to 0 \;\Rightarrow\; K_i \tilde{A} = K_i A \oplus K_i \mathbb{C} \right)$

$\Rightarrow$ $K_0\, C(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & n \text{ ungerade} \end{cases}$, $\quad K_1\, C(S^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & n \text{ ungerade} \end{cases}$

(Siehe auch: Rørdam, Larsen, Laustsen, An introduction to K-theory for C^*-algebras, "Table of K-groups", S. 234-235 für eine Übersicht)

10.11 Lemma (Erzeuger): Oft nicht nur $K_0(A)$ wichtig, sondern auch Erzeuger. Bsp.: $\mathbb{Z}$ hat Erzeuger 1, finde $[p]\in K_0 A \underset{\cong}{\mathbb{Z}}$ mit $[p]\hat{=} 1$ bzw. $[u]\in K_1 A=\mathbb{Z}$ mit $[u]\hat{=}1$.

(a) Der Erzeuger von $K_0(\mathbb{C})=\mathbb{Z}$ ist $[1]$.

(b) Der Erzeuger von $K_0(\mathcal{J})=\mathbb{Z}$ ist $[1]$

(c) Der Erzeuger von $K_0(\mathcal{K})=\mathbb{Z}$ ist $[p]$, wobei p Rang-1-Proj.

(e) Der Erzeuger von $K_0(C(S^1))=\mathbb{Z}$ ist $[1]$.

(f) Der Erzeuger von $K_1(C(S^1))=\mathbb{Z}$ ist $[u]$, $C(S^1)=C^*(u \text{ unitär})$

(d) für $\mathcal{K}=\langle 1-vv^*\rangle \lhd \mathcal{J}=C^*(v \text{ Isometrie})$ ist der Erzeuger von $K_0(\mathcal{K})=\mathbb{Z}$ gerade $[1-vv^*]$.

Beweis: (a) $K_0(\mathbb{C})=\mathbb{Z}$, da $H(\mathbb{C})=\mathbb{N}_0 \overset{3.10}{=}$ mögliche Dimension von Projektionen in $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n(\mathbb{C})$

da $\operatorname{rang} p=1\in\mathbb{N}_0$ Erzeuger, für Rang-1-Proj. $p\in M_n(\mathbb{C})$, ist der Erzeuger von $K_0(\mathbb{C})=\mathbb{Z}$ die Klasse $[1]$.

(b) Nach 10.4 ist $K_0(\mathbb{C})\xrightarrow{K_0(j)} K_0(\mathcal{J})$ ein Isomorphismus und also wird Erzeuger auf Erzeuger abgebildet, d.h. $K_0(j)[1]=[1]$ Erzeuger von $K_0(\mathcal{J})=\mathbb{Z}$.

(c) $\mathbb{C}\xrightarrow{\iota}\mathcal{K}=\overline{\bigcup M_n(\mathbb{C})}$

$\lambda\longmapsto\lambda p$, $p=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&\ddots\end{pmatrix}$ Rang-1-Proj.

$\overset{5.7}{\Longrightarrow} K_0(\iota)$ Isomorphismus, also $[p] \underset{K_0(\iota)[1]}{\overset{\shortparallel}{}}$ Erzeuger von $K_0\mathcal{K}=\mathbb{Z}$

(d) $0\to\mathcal{K}\to\mathcal{J}\xrightarrow[v\mapsto u]{} C(S^1)\to 0$ exakt

$\mathcal{K}\cong\langle 1-vv^*\rangle$, $\mathcal{J}=C^*(v \text{ Isometrie})$, $C(S^1)=C^*(u \text{ unitär})$

Hierin ist $\mathcal{K}\ni\begin{pmatrix}1&\\&0&\\&&\ddots\end{pmatrix}\hat{=}1-vv^*\in\langle 1-vv^*\rangle$

(denn $E_{ij}\hat{=} v^{i-1}(1-vv^*)v^{*j-1}$,

schreibe $\mathcal{K}=C^*(E_{ij}, i,j\in\mathbb{N} \mid E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}, E_{ij}^*=E_{ji})$)

(e+f): $0\to S\mathbb{C}\to C(S^1)\underset{f\longmapsto f(1)}{\overset{\lambda 1 \,\leftarrow\!\shortmid\, \lambda}{\rightleftarrows}}\mathbb{C}\to 0 \Longrightarrow K_0(C(S^1))=\mathbb{Z}=\langle[1]\rangle$

$K_1(C(S^1))=\langle[\mathrm{id}_{S^1}]\rangle$

aus 10.7
$\downarrow$

10.11 Prop. (Beschreibung der Randabbildungen): $0 \to I \to A \xrightarrow{\pi} B \to 0$ exakt

(a) $u \in M_k \tilde{B}$ unitär, $v \in M_k \tilde{A}$ Isometrie, $\pi(v) = u$.

Dann $\partial_1(\underset{K_1 B}{\underset{\cap}{[u]}}) = [1 - vv^*] \in K_0 I$ „Index von u"

(b) $p \in M_k \tilde{B}$ Proj., $h \in M_k \tilde{A}$ selbstadj., $\pi(h) = p$.

Dann $\partial_0(\underset{K_0 B}{\underset{\cap}{[p]}}) = [e^{2\pi i h}] \in K_1 I$ Exponentialabbildung

Bew: (a)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & J \arrow[r] \arrow[d] & C(S^1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & u_0 \arrow[d, mapsto] \\
v \arrow[r, mapsto] & u
\end{tikzcd}$$

6-Term-Seq. ist „natürlich"
$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
K_0 \mathcal{K} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & K_0 I \\
K_1 C(S^1) \arrow[r] \arrow[u, "\partial_1"] & K_1 B \arrow[u, "\partial_1"']
\end{tikzcd}$$

muss also nur $\partial_1 : K_1 C(S^1) \to K_0 \mathcal{K}$ verstehen

Habe

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} = K_0(\mathcal{K}) \arrow[r] & K_0(J) \overset{10}{=} \mathbb{Z} \overset{10.11}{=} \langle [1] \rangle \arrow[r, "K_0(\varphi)"] & K_0(C(S^1)) = \mathbb{Z} \overset{10.11}{=} \langle [1] \rangle \arrow[d] \\
\mathbb{Z} = K_1(C(S^1)) \arrow[u, "\partial_1"] & K_1(J) = 0 \arrow[l] & K_1 \mathcal{K} = 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Da $K_0(\varphi)[1] = [1]$, ist $K_0(\varphi)$ ein Isomorphismus

$\Rightarrow$ ∂_1 ist Isomorphismus, schickt also Erzeuger auf Erzeuger,

d.h. nach 10.11: $\partial_1([u]) = [1 - vv^*]$

(b) Betrachte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[u, "1", shift left] & 0
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
0 = K_0 S\mathbb{C} \arrow[r] & K_0 C\mathbb{C} = 0 \arrow[r] & K_0 \mathbb{C} \arrow[d, "\partial_0"] \\
0 = K_1 \mathbb{C} \arrow[u] & K_1 C\mathbb{C} = 0 \arrow[l] & K_1 S\mathbb{C} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ ∂_0 Isomorphismus

[...]

$\square$

10.12 <u>Bem.:</u> (a) In 10.11(a) ist $\partial_1 : \underset{\overset{\parallel}{U^\infty(C(S^1))/U_0^\infty(C(S^1))}}{K_1(C(S^1))} \longrightarrow K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$

gerade $C(S^1) \ni f \mapsto \mathrm{wind}(f) \in \mathbb{Z}$ Umdrehungszahl um 0

denn $u \mathrel{\hat{=}} \mathrm{id}_{S^1} \mapsto 1$, Potenzen $\mapsto k \in \mathbb{Z}$.

(b) Zum Fredholmindex: Sei H sep., unendl.dim. HR, (e_n) ONB.

(i) $T \in \mathcal{L}(H)$ Fredholmoperator $:\Longleftrightarrow$ Bild T abgeschl., $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$, $\dim \operatorname{Ker} T^* < \infty$,

$\operatorname{ind}(T) := \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Ker} T^* \in \mathbb{Z}$

(ii) $\mathrm{Tr} : \mathcal{L}(H) \longrightarrow \mathbb{C}$, $T \longmapsto \sum_{n \geq 1} \langle Te_n, e_n \rangle$ unbeschränkte Spur, $\mathrm{Tr}(p) = \dim pH$, $p \in \mathcal{L}(H)$ Proj.

$\mathrm{Tr}(T) < \infty \Longleftarrow T \in \mathcal{K}(H), \sum \lambda_n < \infty$ wo (λ_n) Eigenwerte von $|T|$ mit Multiplizität, $\lambda_n \geq \lambda_{n+1}$

insbes. $\mathrm{Tr}(T) < \infty$ $\forall T \in \mathcal{K}(H)$ Proj.

(iii) $K_0(\mathrm{Tr}) : K_0(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathbb{Z} = K_0(\mathbb{C})$ Isomorphismus, $[p] \longmapsto \mathrm{Tr}(p)$

und $\operatorname{ind} T = \big(K_0(\mathrm{Tr}) \circ \partial_1\big)[\pi(T)]$, $\pi : \mathcal{L}(H) \to Q(H)$ für $T \in \mathcal{L}(H)$ Fredholm (denn $\pi(T) \in Q(H)$ invertierbar, Blatt 1 $\Longrightarrow$ unitär)

in

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} = K_0 \mathcal{K} \arrow[r] & K_0 \mathcal{L}(H) \overset{=0}{} \arrow[r] & K_0 Q(H) = 0 \arrow[d] \\
K_1 Q(H) \arrow[u, "\partial_1", "\cong"'] & \underset{\overset{\parallel}{0}}{K_1 \mathcal{L}(H)} \arrow[l] & \underset{\overset{\parallel}{0}}{K_1 \mathcal{K}} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

d.h. "$\operatorname{ind} = \partial_1$"