

§ 10 Bifurkationstheorie

10.1 Lemma: Sei $\hat{T} := C^k(\tilde{v}, \tilde{w}) \in \mathcal{J} \otimes \mathcal{J}$, $\tilde{v} := v \otimes 1$, $\tilde{w} := (1-w^*) \otimes v$. \mathcal{J} unklare

(a) $\hat{T} = C^k(\mathcal{K} \otimes \mathcal{J}, \mathcal{J} \otimes 1)$

(b) $\mathcal{K} \otimes \mathcal{J} \triangleleft \hat{T}$, $\hat{T} / \mathcal{K} \otimes \mathcal{J} \cong C(S^1)$, $\tilde{w} \mapsto 0$, $\tilde{v} \mapsto id_{S^1} (=u)$

Bew: (a) $\mathcal{K} \cong \overline{\text{span}} \{v^k (1-w^*) v^{n-k} \mid k, l \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \tilde{v}, \tilde{w} \in C^k(\mathcal{K} \otimes \mathcal{J}, \mathcal{J} \otimes 1)$
 Umgekehrt $\mathcal{J} \otimes 1 = C^k(\tilde{v}) \subseteq C^k(\tilde{v}, \tilde{w})$ und

$\mathcal{K} \otimes \mathcal{J} \cong \overline{\text{span}} \{v^k (1-w^*) v^{n-k} \otimes x \mid k, l \in \mathbb{N}_0, x \in \mathcal{J}\} \subseteq C^k(\tilde{v}, \tilde{w})$
 da $C^k(\tilde{w}) = (1-w^*) \otimes \mathcal{J} \stackrel{=: \mathcal{J}}{=}$

(b) $\tilde{v} \in \mathcal{J}$, $\tilde{v}^* \in \mathcal{J}$, $\tilde{w} \in \mathcal{J}$, $\tilde{w}^* \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J} \Rightarrow \mathcal{J} \triangleleft \hat{T}$

Auflösung $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow C(S^1) \rightarrow 0$ exakt
 $\Rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J} \otimes \mathcal{J} \xrightarrow{\hat{\pi}} C(S^1) \otimes \mathcal{J} \rightarrow 0$ exakt
 $\begin{matrix} \mathcal{K} \otimes \mathcal{J} & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \hat{T} & & \hat{\pi}(v \otimes 1) = u \otimes 1 \\ & \cong & \uparrow & & \hat{\pi}((1-w^*) \otimes 1) = 0 \end{matrix}$
 $\Rightarrow \hat{T} / \mathcal{K} \otimes \mathcal{J} \cong \hat{\pi}(\hat{T}) = C^k(u \otimes 1) \cong C(S^1)$ \square

10.2 Lemma: $E := \{(x, y) \mid \pi(x) = \tau(y)\} \subseteq \hat{T} \otimes \mathcal{J}$ C^k -Unteralgebra $\triangleleft A$
 $\pi: \hat{T} \rightarrow C(S^1)$, $\tau: \mathcal{J} \rightarrow C(S^1)$, $E \xrightarrow{\hat{\pi}} \hat{T}$ Pullback.
 $\tilde{v} \mapsto 0$, $v \mapsto u$, $\downarrow \subseteq \downarrow \pi$
 $\tilde{v} \mapsto u$, $\mathcal{J} \xrightarrow{\tau} C(S^1)$

(a) Dann $0 \rightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{J} \xrightarrow{\hat{\pi}} E \xrightarrow{\tau} \mathcal{J} \rightarrow 0$ zerfällt
 $\begin{matrix} (\tilde{v}, v) \xrightarrow{\hat{\pi}} v \\ (x, y) \xrightarrow{\tau} y \\ x \mapsto (x, 0) \end{matrix}$

(b) ~~$0 \rightarrow K(\mathcal{K} \otimes \mathcal{J}) \rightarrow K(E)$~~
 $\omega: \mathcal{J} \rightarrow E$ liefert $K(\omega): K(\mathcal{J}) \rightarrow K(E)$ injektiv
 $v \mapsto (\tilde{w}, 0)$

Bew: (a) π ist die Abb. aus 10.1, also $\text{Kern } \pi = \mathcal{K} \otimes \mathcal{J}$, d.h. L ex. & inj.
 τ surj.: $(\tilde{v}, v) \in E$ da $\pi(\tilde{v}) = u = \tau(v)$ und $\tau(\tilde{v}, v) = v$, also $\tau(\tilde{y}, y) = y$.
 α ex.: $(\tilde{v}, v) \in E$ Isometrie
 $\tau \circ \alpha = id_{\mathcal{J}}$: $\tau \circ \alpha(v) = \tau(\tilde{v}, v) = v$
 $\text{Kern } \tau = \mathcal{B} \cap L$: $\tau(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ und $\pi(x) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ & $x \in \mathcal{K} \otimes \mathcal{J}$

(b) $0 \rightarrow K(\mathcal{K} \otimes \mathcal{J}) \rightarrow K(E) \xrightarrow{\cong} K(\mathcal{J}) \rightarrow 0$ zerfällt (a) & 6.7
 $\begin{matrix} K(\hat{\pi}) \uparrow \subseteq \\ K(\mathcal{J}) \xrightarrow{K(\omega)} \end{matrix}$, $\tau(v) = \tilde{w}$ Isometrie $\wedge C^k(\tilde{w})$
 $K(\tau)$ Isomorphismus nach 5.7, also $K(\omega)$ injektiv \square

10.3 Lemma: Für $\psi_0: J \rightarrow E$
 $v \mapsto (\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{w}, v)$

und $\psi_1: J \rightarrow E$
 $v \mapsto (\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + (1-\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2}), v)$

gilt:

(a) ψ_0, ψ_1 wohldef.

(b) $\psi_0 = \psi + \omega$, $\psi_1 = \omega \circ j \circ k$

für $\psi: J \rightarrow E$, $J: \mathbb{C} \rightarrow J$, $k: J \rightarrow \mathbb{C}$
 $v \mapsto (\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2}, v)$, $\lambda \mapsto \lambda 1$, $v \mapsto 1$

(c) $\psi_0 \sim_2 \psi_1$

Bew: (a) $(\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{w})^{\otimes 2} (\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{w}) = \tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{w}^{\otimes 2} \tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} \tilde{w} + \tilde{w}^{\otimes 2} \tilde{v}$
 $= v v^{\otimes 2} \otimes 1 + 0 + 0 + (1-v v^{\otimes 2}) \otimes v^{\otimes 2} v = 1 \otimes 1$
 $(\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + (1-\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2}))^{\otimes 2} (\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + (1-\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2})) = \tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + 0 + 0 + (1-\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2}) = 1 \otimes 1$
 $\pi(\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2}) = u u u^{\otimes 2} = u = \pi(v)$, $\pi(\tilde{w}) = \pi(1-v\tilde{v}^{\otimes 2}) = 0$, d.h. ψ_0, ψ_1 univ. E

(b) $(\psi + \omega)(v) = (\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{w}, v) = \psi_0(v)$
 $(\psi + \omega \circ j \circ k)(v) = (v\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2}, v) + \omega(1) = (\tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2}, v) + (1-v v^{\otimes 2}) \otimes 1 = \psi_1(v)$

$\psi \cdot \omega = \omega \cdot \psi = 0$, d.h. $\psi + \omega$ ist \mathbb{Z} -Hom.

(c) MA $\tilde{g} := (1-w^{\otimes 2}) \otimes (1-w^{\otimes 2}) \in \hat{T}$ ist
 $\tilde{w}^{\otimes 2} \tilde{v} = \tilde{w} \tilde{v} = \tilde{v}^{\otimes 2} \tilde{w} = \tilde{v}^{\otimes 2} \tilde{w}^{\otimes 2} = \tilde{v}^{\otimes 2} \tilde{g} = \tilde{g} \tilde{v} = \tilde{w}^{\otimes 2} \tilde{g} = \tilde{g} \tilde{w}^{\otimes 2} = 0$

für $z_0 := \tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} \tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{w} \tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{v} \tilde{w}^{\otimes 2} + \tilde{g}$
 und $z_1 := \tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} \tilde{v}^{\otimes 2} + (1-\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2}) \tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{v} (1-\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2})$

ist $z_i = z_i^{\otimes 2}$, $z_i^2 = 1 \otimes 1$, denn

$$z_0^2 = \tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} \tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{w} \tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{v} \tilde{w}^{\otimes 2} + \tilde{g}$$

$$= v v v^{\otimes 2} v^{\otimes 2} \otimes 1 + (1-v v^{\otimes 2}) \otimes v^{\otimes 2} + v (1-v v^{\otimes 2}) v^{\otimes 2} \otimes 1 + (1-v v^{\otimes 2}) \otimes (1-v v^{\otimes 2})$$

$$= 1 \otimes 1$$

$$z_1^2 = \tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} \tilde{v}^{\otimes 2} + (1-\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2}) + \tilde{v} (1-\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2}) \tilde{v}^{\otimes 2} = 1$$

$\Rightarrow z_i$ sind invertierbar, $\text{Sp } z_i \neq 5^1 \Rightarrow z_0, z_1 \in \mathcal{U}_0$

$\Rightarrow z_0 \sim_2 1 \sim_2 z_1$ per $(z_t)_{t \in [0,1]}$

Setze $\psi_t: J \rightarrow E$, $\psi_{t=0} = \psi_0$, $\psi_{t=1} = \psi_1$
 $v \mapsto (z_t \tilde{v}, v)$

denn $z_0 \tilde{v} = \tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + \tilde{w}$, $z_1 \tilde{v} = \tilde{v}\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2} + (1-\tilde{v}\tilde{v}^{\otimes 2})$ □

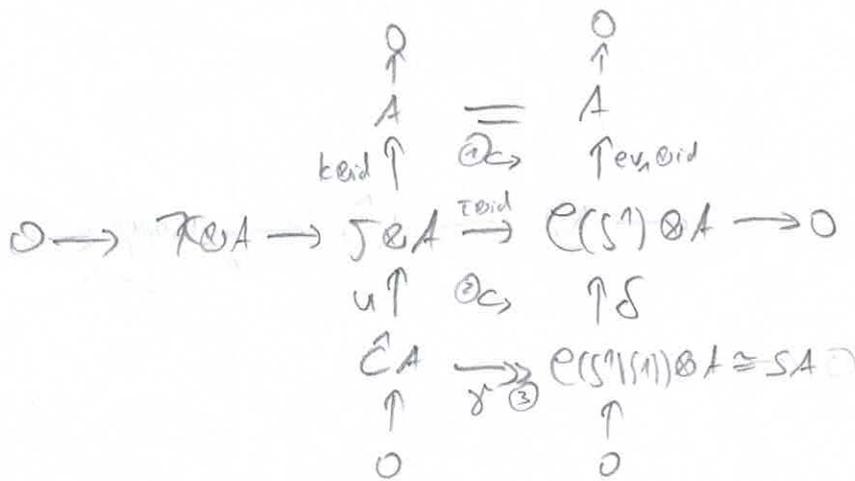
10.4 Lemma: Für $j: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{J}$, $k: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$, $j \circ \text{id}: A \rightarrow \mathcal{J} \otimes A$, $k: \mathcal{J} \otimes A \rightarrow A$
 $\lambda \mapsto \lambda 1$, $\nu \mapsto 1$, $u \mapsto 1 \otimes a$, $v \otimes a \mapsto a$
 gilt $K_0(A) \cong K_0(\mathcal{J} \otimes A)$, da $K_0(j \circ \text{id})$, $K_0(k \circ \text{id})$ Invers sind.

Bew: $K_0(k) \circ K_0(j) = K_0(\text{id}) = \text{id}_{K_0(\mathcal{C})}$
 $K_0(j) \circ K_0(k) = K_0(\eta) + K_0(\omega) \stackrel{10.3}{=} K_0(\eta) + K_0(\omega) K_0(j) K_0(k) \stackrel{K_0(\omega) \text{ inj. (10.2)}}{\implies} K_0(j) K_0(k) = \text{id}_{K_0(\mathcal{J})}$
 Basis für $\cdot \otimes \text{id}_A$. □

10.5 Satz (Kurzperiodizität): $K_0(S^2 A) \cong K_0(A)$
 Bew

10.5 Lemma: Die Folge $0 \rightarrow \hat{\mathcal{C}}A \rightarrow \mathcal{J} \otimes A \xrightarrow{\tau \circ \text{id}_A} A \rightarrow 0$ zerfällt,
 wobei $\hat{\mathcal{C}}A := \text{Kern } \tau \circ \text{id}_A$. Außerdem ist
 $0 \rightarrow \mathcal{K} \otimes A \rightarrow \hat{\mathcal{C}}A \xrightarrow{\delta} SA \rightarrow 0$ exakt
 und $K_0(\hat{\mathcal{C}}A) = 0$.

Bew: $K_0 A \stackrel{10.4}{\cong} K_0(\mathcal{J} \otimes A) \stackrel{6.7}{=} K_0(\hat{\mathcal{C}}A) \oplus K_0 A \implies K_0 \hat{\mathcal{C}}A = 0$



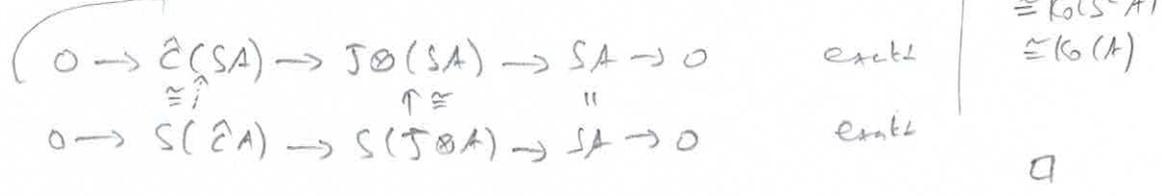
exakt nach 9.4 (9.2/9)

- ① \circlearrowright : $(\text{ev}_1 \circ \text{id})(\tau \circ \text{id})(\nu \otimes a) = (\text{ev}_1 \circ \text{id})(u \otimes a) = a = (\text{ker id})(\nu \otimes a)$
- ② \circlearrowright : $\hat{x} \in \hat{\mathcal{C}}A$. Dann $\tau \circ \text{id}_A(\hat{x}) \in \text{Kern}(\text{ev}_1 \circ \text{id}) = \text{Bild } \delta$
 $((\text{ev}_1 \circ \text{id})(\tau \circ \text{id}_A)(\hat{x})) \stackrel{\circlearrowright}{=} (\text{ker id})(\hat{x}) = 0$
 $\implies \exists! y \in SA$ mit $\delta(y) = \tau \circ \text{id}_A(\hat{x})$. Setze $\gamma(x) := y$
- ③ γ surj.: $y \in SA$. Da $\tau \circ \text{id}$ surj., ex. $x \in \mathcal{J} \otimes A$ mit $\tau \circ \text{id}(x) = \delta(y)$.
 Dann $x \in \hat{\mathcal{C}}A$ ($\text{ker id}(x) = (\text{ev}_1 \circ \text{id})(\tau \circ \text{id})(x) = (\text{ev}_1 \circ \text{id})(\delta(y)) = 0$)
 und $\gamma(x) = y$.
- ④ $\text{Kern } \gamma = \mathcal{K} \otimes A$: $x \in \text{Kern } \gamma \stackrel{\delta \text{ inj.}}{\iff} x \in \text{Kern } \delta \circ \gamma = \text{Kern } \tau \circ \text{id} = \mathcal{K} \otimes A$ □

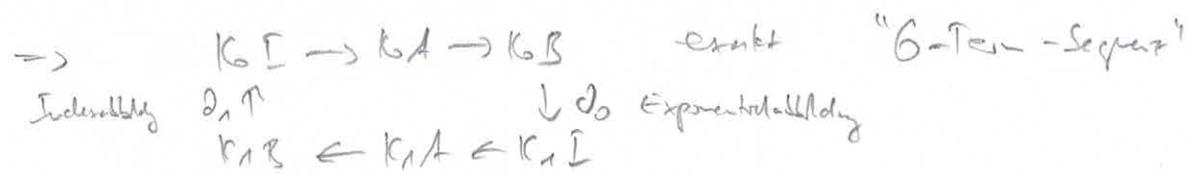
10.6 Satz (Loffperiodizität): $K_0(S^2 A) \cong K_0(A)$ wobei $K_1(SA) \cong K_0(A)$

Bew: Nach 8.7: $K_0(S^2 A) \rightarrow K_0(S^2 A) \rightarrow K_0(K \otimes A) \rightarrow K_0(\hat{C}(A)) \rightarrow K_0(SA)$ exakt
 "0" "K_0 A" "10.5" "0"

Es gilt $S^2 A = \hat{C}(SA)$, also $K_0(S^2 A) \cong K_0(\hat{C}(SA))$

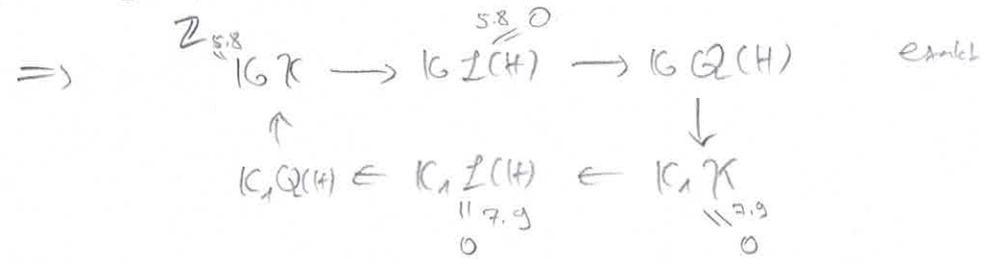


10.7 Korollar: $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$ exakt



Bew: $K_0(S^2 I) \rightarrow K_0(S^2 A) \rightarrow K_0(S^2 B) \rightarrow K_0 S I \rightarrow K_0 SA \rightarrow K_0 SB \rightarrow K_0 I \rightarrow K_0 A \rightarrow K_0 B$
 "K_0 I" "K_0 A" "K_0 B" "K_1 I" "K_1 A" "K_1 B"

10.8 Berechnung: (a) $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow I(\mathbb{H}) \rightarrow Q(\mathbb{H}) \rightarrow 0$ exakt



$\Rightarrow K_0 Q(\mathbb{H}) = 0 \quad \& \quad K_1 Q(\mathbb{H}) \cong K_0 K = \mathbb{Z}$

(b) $K_0 J = 0 \rightarrow SA \rightarrow e(S^1) \xrightarrow{f \mapsto f(1)} \mathbb{C} \rightarrow 0$ zuzufügen (vgl. 7.9)

$\Rightarrow K_0 e(S^1) = K_0 SA \oplus K_0 \mathbb{C} \stackrel{7.7}{=} K_{i+1} \mathbb{C} \oplus K_i \mathbb{C} \stackrel{5.8}{=} \mathbb{Z}$

(c) allgemeiner $0 \rightarrow SA \rightarrow e(S^1) \otimes A \xrightarrow{f \mapsto f(1)} A \rightarrow 0$ zuzufügen

$K_0 J$ exakt $K_0 e(S^1) \otimes A = K_0 A \oplus K_{i+1} A$ $\pi^{n+1} = (S^1)^{n+1}$

$\Rightarrow K_0 (e(\pi^{n+1})) \cong K_0 (e(S^1) \otimes e(\pi^n)) = K_0 e(\pi^n) \oplus K_{i+1} e(\pi^n)$

$\cong \mathbb{Z}^{2^{n+1}} \oplus \mathbb{Z}^{2^n} = \mathbb{Z}^{2^{n+1}}$
 I.V.

(c) $K_0 J \stackrel{10.4}{=} K_0 \mathbb{C} = \mathbb{Z}$, $K_1 J \stackrel{7.7}{=} K_0(S \otimes J) \stackrel{10.4}{=} K_0(S) \stackrel{7.7}{=} K_1(\mathbb{C}) = 0$

10.9 Bemerkung: Die topologischen Räume

$$S^1 = \mathbb{O}, \quad [0,1] = \mathbb{H}, \quad [0,1) = \mathbb{H}, \quad (0,1) = \mathbb{H}$$

sind verschiedene. Auf wie C^* -Algebren?

	$C(S^1)$	$C([0,1])$	$C_0([0,1])$	$C_0(0,1) = \mathcal{S}\mathbb{C}$
K_0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{O}	\mathbb{O}
K_1	\mathbb{Z}	\mathbb{O}	\mathbb{O}	\mathbb{Z}
	10.10.8	(4.7)	(4.7)	(7.7, 10.6)

10.10 Bemerkung: (a) $SA \cong C_0(\mathbb{R}, A)$, da $(0,1) \cong \mathbb{R}$ homöomorph

(beachte: $\varphi: X \xrightarrow{\cong} Y$ Homöomorphismus $\Rightarrow C(Y) \xrightarrow{\cong} C(X)$ Isom.)
 $f \mapsto f \circ \varphi$

Und $C_0(\mathbb{R}^n) \cong C_0(\mathbb{R}, C_0(\mathbb{R}^n)) \stackrel{\text{I. Ver.}}{\cong} C_0(\mathbb{R}, S^n \mathbb{C}) \cong S^{n+1} \mathbb{C}$

$\Rightarrow K_i C_0(\mathbb{R}^n) \cong K_i(S^n \mathbb{C}) \stackrel{7.7 \& 10.6}{\cong} K_{i+n}(\mathbb{C}) =$

$\Rightarrow K_0 C_0(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n \text{ gerade} \\ \mathbb{O} & n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad K_1 C_0(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{O} & n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & n \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$. Ein-Punkt-Kompaktifizierung $\widehat{\mathbb{R}^n}$
 homöomorph zu S^n . Also $C_0(\widehat{\mathbb{R}^n}) \cong C(S^n)$

$\Rightarrow K_i C(S^n) = K_i C_0(\widehat{\mathbb{R}^n}) = K_i C_0(\mathbb{R}^n) \oplus K_i \mathbb{C}$

$(0 \rightarrow A \rightarrow X \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \rightarrow 0 \Rightarrow K_i X = K_i A \oplus K_i \mathbb{C})$

$\Rightarrow K_0 C(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad K_1 C(S^n) = \begin{cases} \mathbb{O} & n \text{ gerade} \\ \mathbb{Z} & n \text{ ungerade} \end{cases}$

(Siehe auch: Børdon, Larsen, Lauter, An Introduction to K-theory for C^* -algebras, "Table of K-groups", S. 234-235 für die Übersicht)

10.11 Lemma (Erzeuger): Oft reicht nur $K_f(A)$ wichtig, sondern auch Erzeuger. Bsp: \mathbb{Z} hat Erzeuger 1, für alle $[p] \in K_f A \cong \mathbb{Z} \rightarrow [p] \cong 1$ bzw. $[u] \in K_f A = \mathbb{Z} \rightarrow [u] \cong 1$.

(a) Der Erzeuger von $K_f(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ ist $[1]$.

(b) Der Erzeuger von $K_f(\mathbb{J}) = \mathbb{Z}$ ist $[1]$.

(c) Der Erzeuger von $K_f(K) = \mathbb{Z}$ ist $[p]$, wobei p Rang-1-Proj.

(e) Der Erzeuger von $K_f(\mathcal{C}(S^1)) = \mathbb{Z}$ ist $[1]$.

(f) Der Erzeuger von $K_f(\mathcal{C}(S^1)) = \mathbb{Z}$ ist $[u]$, $\mathcal{C}(S^1) = \mathcal{C}^*(u - v^2)$

(d) für $K = \langle 1 - v^2 \rangle \triangleleft J = \mathcal{C}^*(v)$ (Isometrie) ist der Erzeuger von $K_f(K) = \mathbb{Z}$ gerade $[1 - v^2]$.

Beweis: (a) $K_f(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, da $H(\mathbb{C}) = \mathbb{N}_0 \stackrel{3.10}{=} \text{mögliche Dimension von Projektionen in } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n(\mathbb{C})$

da $\text{rang } p = 1 \in \mathbb{N}_0$ Erzeuger, für Rang-1-Proj. $p \in M_n(\mathbb{C})$, ist der Erzeuger von $K_f(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ die Klasse $[1]$.

(b) Nach 10.4 ist $K_f(\mathbb{C}) \xrightarrow{K_f(j)} K_f(\mathbb{J})$ ein Isomorphismus und also wird Erzeuger auf Erzeuger abgebildet, d.h. $K_f(j)[1] = [1]$ Erzeuger von $K_f(\mathbb{J}) = \mathbb{Z}$.

(c) $\mathbb{C} \xrightarrow{\lambda} K = \bigcup M_n(\mathbb{C})$
 $\lambda \mapsto \lambda p$, $p = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ Rang-1-Proj.

5.7
 $\Rightarrow K_f(K)$ Isomorphismus, also $[p]$ Erzeuger von $K_f(K) = \mathbb{Z}$
 " $K_f(K)[1]$

(d) $0 \rightarrow K \rightarrow J \rightarrow \mathcal{C}(S^1) \rightarrow 0$ exakt

$\begin{matrix} \cong & & \cong & & \cong \\ \mathcal{C}(1 - v^2) & & \mathcal{C}^*(v) & & \mathcal{C}^*(u - v^2) \end{matrix}$

Hierin ist $K \cong \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \cong 1 - v^2 \in \mathcal{C}(1 - v^2)$

(denn $E_{ij} \cong v^{i-1} (1 - v^2) v^{j-1}$,

Schreibe $K = \mathcal{C}^*(E_{ij}, i, j \in \mathbb{N} \mid E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il},$

$\lambda \mapsto \lambda$

$E_{ij}^* = E_{ji}$)

(e+f): $0 \rightarrow SC \rightarrow \mathcal{C}(S^1) \xrightarrow{f} \mathbb{C} \rightarrow 0 \Rightarrow K_f(\mathcal{C}(S^1)) = \mathbb{Z} = \langle [1] \rangle$
 $K_f(\mathcal{C}(S^1)) = \langle [\text{id}_{S^1}] \rangle$

aus 10.7
↓

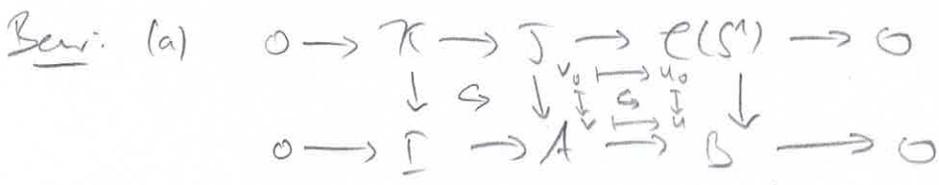
10.11 Prop. (Beschreibung der Pankalbildungen): $0 \rightarrow I \rightarrow A \xrightarrow{\pi} B \rightarrow 0$ exakt

(a) $u \in M_k B$ invert., $v \in M_k A$ Isometrie, $\pi(v) = u$.

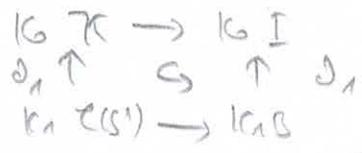
Dann $D_1(\begin{smallmatrix} u \\ \uparrow \\ k_1 B \end{smallmatrix}) = [1 - v^*] \in k_1 I$ "Index von u"

(b) $p \in M_k B$ Proj., $h \in M_k A$ selbstadj., $\pi(h) = p$.

Dann $D_0(\begin{smallmatrix} p \\ \uparrow \\ k_0 B \end{smallmatrix}) = [e^{2\pi i p}] \in k_1 I$ Exponentialabbildg

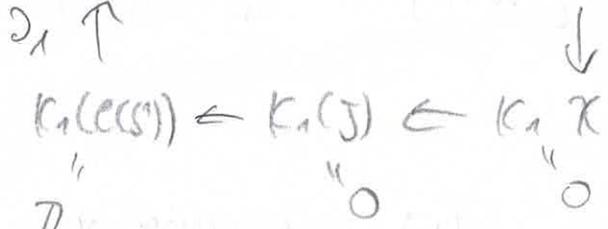


6-Term-Seq. ist "invariant"



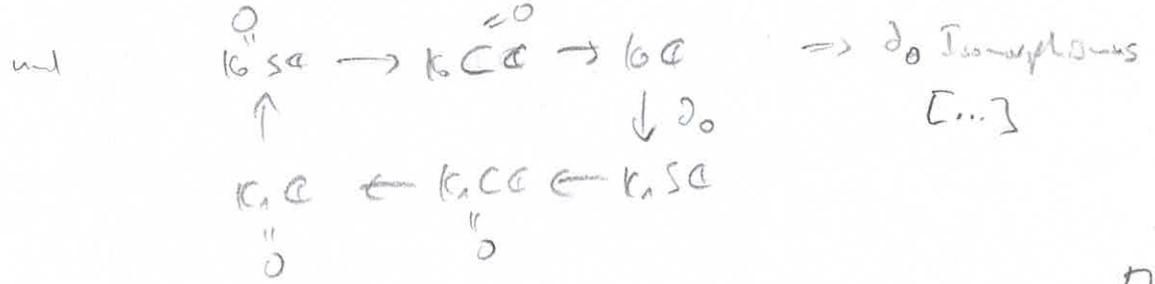
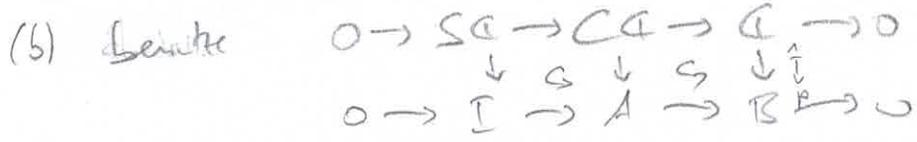
muss also nur
 $D_1: k_1 C(S^1) \rightarrow k_0 K$
verstehen

Wobei $D_1 = \sum_{10.11} \langle [1] \rangle = \sum_{10.11} \langle [1] \rangle$



Dann $k_0(\varphi)[1] = [1]$, ist $k_0(\varphi)$ Isomorphismus

$\Rightarrow D_1$ ist Isomorphismus, sendet also Erzeuger auf Erzeuger, d.h. nach 10.11: $D_1(\begin{smallmatrix} u \\ \uparrow \\ k_1 B \end{smallmatrix}) = [1 - v^*]$



□

