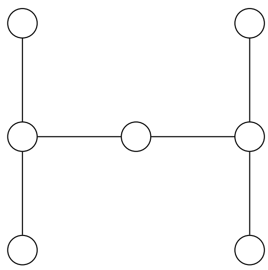
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Kombinatorik und Graphentheorie*
Sommersemester 2015

Blatt 3
Abgabe: Freitag, 15.5.2015, bis 10:15 Uhr
in den Briefkasten 26 im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Für einen Graphen $G = (V, E)$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Aut}(G)$ die Menge der *Automorphismen von* G, d.h. die Menge der Isomorphismen zwischen G und sich selbst. Man kann sich leicht davon überzeugen (und sollte es auch tun, obwohl es hier nicht verlangt ist!), dass $\mathrm{Aut}(G)$ bezüglich Komposition eine Gruppe ist. Wir nennen daher $\mathrm{Aut}(G)$ die *Automorphismengruppe von* G.

(a) Beschreiben Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ des folgenden Graphen G.



(b) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit S_n die Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$. Geben Sie für jede der Gruppen S_2, S_3, $S_3 \times S_4$ und $S_3 \times S_3$ einen Graphen G an, dessen Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ isomorph zur jeweiligen Gruppe ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Gegeben seien $n, m \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie das Spektrum des vollständigen bipartiten Graphen $K_{n,m}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei λ ein Eigenwert eines einfachen Graphen mit n Ecken und m Kanten. Zeigen Sie, dass

$$|\lambda| \leq \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\mathrm{Tr}(A)$ und $\mathrm{Tr}(A^2)$ für die Nachbarschaftsmatrix A des Graphen.