UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Kombinatorik und Graphentheorie*
Sommersemester 2015

Blatt 4
Abgabe: Freitag, 22.5.2015, bis 10:15 Uhr
in den Briefkasten 26 im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 5.3 (3). Zeigen Sie dazu die folgende Aussage:

Sei G ein zusammenhängender, k-regulärer Graph. Weiter seien $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1}$ die Eigenwerte (mit Multiplizität) der Matrix $P := \frac{1}{k}A(G)$, wobei $A(G)$ die Adjazenzmatrix von G bezeichne. Es gelte $\lambda_{n-1} = -1$. Dann erfüllt jeder Eigenvektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ von P zum Eigenwert λ_{n-1} die Bedingung

$$|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_n|$$

und die beiden Mengen

$$A := \{i|\ x_i > 0\} \qquad \text{und} \qquad B := \{i|\ x_i < 0\}$$

liefern eine Bipartition von G.

bitte wenden

Aufgabe 2 (25 Punkte!)**.** In dieser Aufgabe wollen wir uns einige wesentliche Teile des Satzes von Perron-Frobenius in einer speziellen Version für symmetrische Übergangsmatrizen endlicher Markovketten erarbeiten.

Unter einer *Übergangsmatrix (der Dimension $n \times n$)* verstehen wir im Folgenden eine Matrix $P = (p_{i,j})_{i,j=1}^n$ mit Einträgen $[P]_{i,j} = p_{i,j} \in [0,1]$, die die beiden Bedingungen

$$\text{(i)} \qquad \sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1 \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{i=1}^n p_{i,j} = 1 \qquad \text{für alle } j = 1, \dots, n$$

erfüllt. Eine Übergangsmatrix P nennen wir *zusammenhängend*, falls für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $[P^k]_{i,j} > 0$ gilt.

Gegeben sei nun eine symmetrische Übergangsmatrix P der Dimension $n \times n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jeden Eigenwert λ von P gilt $|\lambda| \leq 1$.

(b) Die Übergangsmatrix P ist genau dann zusammenhängend, wenn es **keine** Permutationsmatrix σ der Dimension $n \times n$ gibt, so dass $\sigma^{-1} P \sigma$ in der Blockform

$$\sigma^{-1} P \sigma = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$$

für zwei Übergangsmatrizen P_1, P_2 der Dimensionen $n_1 \times n_1$ bzw. $n_2 \times n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $n_1 + n_2 = n$ geschrieben werden kann.

Ab jetzt nehmen wir zusätzlich an, dass P zusammenhängend ist. Zeigen Sie weiter:

(c) Die Zahl 1 ist ein Eigenwert von P, der sogenannte *Perron-Frobenius-Eigenwert von P*, und es gibt einen zugehörigen Eigenvektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, der *positiv* ist (d.h. er hat die Eigenschaft $x_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$).

(d) Der Eigenraum von P zum Eigenwert 1 ist eindimensional.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass jeder Eigenvektor $0 \neq x' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$ zum Eigenwert 1, der $x'_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, n$ erfüllt, schon positiv sein muss. Nehmen Sie anschließend an, es gäbe einen zu x linear unabhängigen Eigenvektor $y \neq 0$ von P, und betrachten Sie $x' = x + \alpha y$ für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$.

(e) Ist λ ein beliebiger Eigenwert von P, zu dem es einen positiven Eigenvektor $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ gibt, dann muss bereits $\lambda = 1$ gelten.