UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Kombinatorik und Graphentheorie*
Sommersemester 2015

Blatt 5
Abgabe: Freitag, 29.5.2015, bis 10:15 Uhr
in den Briefkasten 26 im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Gegeben sei $n \geq 3$. Für jeden Baum T auf der Knotenmenge $[n] := \{1, \dots, n\}$ erhalten wir ein Tupel

$$F_T = (a_1, \dots, a_{n-2}) \in \{1, \dots, n\}^{n-2}$$

gemäß dem folgenden Algorithmus (vgl. Algorithmus 6.15 im Skript zur Vorlesung):

- Im i-ten Schritt, entferne das kleinste noch vorhandene Blatt von T und speichere in a_i den eindeutig bestimmten Nachbarn von diesem Blatt.
- Stoppe nach $n - 2$ Schritten.

(a) Geben Sie drei verschiedene Bäume T auf $[7]$ and und bestimmen Sie jeweils F_T. Geben Sie ferner einen Baum auf $[7]$ an mit $F_T = (5, 5, 2, 2, 2)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T \mapsto F_T$ eine Bijektion zwischen der Menge der Bäume auf $[n]$ und $\{1, \dots, n\}^{n-2}$ liefert.

(c) Geben Sie mit (b) einen weiteren Beweis für den Satz von Cayley (Satz 6.13).

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Gegeben seien $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Baum auf n Ecken mit den Ecken-Graden $d_1, \dots, d_n$ gibt, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Anzahl der Bäume auf der Knotenmenge $[n] = \{1, \dots, n\}$, die genau zwei Blätter besitzen. Geben Sie zwei Beweise für Ihre Formel, einen mit Hilfe des Prüfer Codes und einen mittels eines direkten Abzählarguments.

bitte wenden

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Mit dieser Aufgabe setzen wir unsere Untersuchungen zum Satz von Perron-Frobenius fort, die wir in Aufgabe 2 auf Blatt 4 begonnen haben. Während wir uns dort auf den einfacheren Fall symmetrischer Übergangsmatrizen zurückgezogen hatten, wollen wir uns hier dem allgemeineren (und auch interessanteren) Fall beliebiger Übergangsmatrizen endlicher Markovketten zuwenden.

Unter einer *Übergangsmatrix (der Dimension $n \times n$)* verstehen wir nun eine (nicht notwendigerweise symmetrische) Matrix $P = (p_{i,j})_{i,j=1}^n$ mit Einträgen $[P]_{i,j} = p_{i,j} \in [0,1]$, die lediglich *spaltenstochastisch* ist, d.h. es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = 1 \qquad \text{für alle } j = 1, \ldots, n.$$

Wie zuvor, nennen wir eine Übergangsmatrix P *zusammenhängend* (oder *irreduzibel*), falls für beliebige $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ein $k = k(i,j) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $[P^k]_{i,j} > 0$ gilt.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jeden Eigenwert λ einer Übergangsmatrix P gilt $|\lambda| \leq 1$.

(b) Ist P eine zusammenhängende Übergangsmatrix der Dimension $n \times n$, dann ist die Zahl 1 ein Eigenwert von P, der sogenannte *Perron-Frobenius-Eigenwert von P*, und es gibt einen zugehörigen Eigenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, der *positiv* ist (d.h. er hat die Eigenschaft $x_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$).

Hinweis: Sie dürfen (natürlich ohne Beweis) die folgende Version des Brouwerschen Fixpunktsatzes verwenden: *Jede stetige Abbildung $f : K \to K$ auf einer kompakten und konvexen Teilmenge $K \neq \emptyset$ eines endlichdimensionalen Banachraums besitzt einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in K$ mit $f(x) = x$.*

Bemerkung: Auch die Aussagen (d) und (e) in Aufgabe 2 auf Blatt 4 bleiben in dieser Situation richtig. Dies müssen Sie zwar nicht beweisen, Sie sollten sich aber trotzdem davon überzeugen (oder in der Übung davon überzeugen lassen), dass die dort gegebenen Beweise wörtlich übernommen werden können.