UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Kombinatorik und Graphentheorie*
Sommersemester 2015

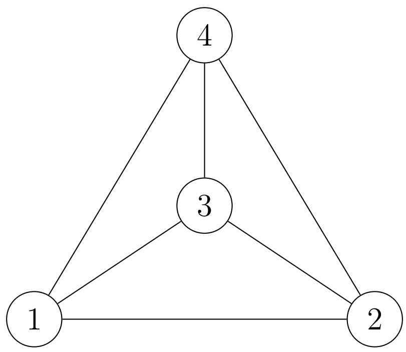
Blatt 6
Abgabe: Freitag, 5.6.2015, bis 10:15 Uhr
in den Briefkasten 26 im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Für einen orientierten Graphen $G = (V, E)$ definieren wir die *Inzidenzmatrix* $M = M(G)$ durch

$$M = (m_{v,e})_{\substack{v\in V\\ e\in E}} \qquad \text{mit} \qquad m_{v,e} := \begin{cases} -1, & \text{falls } e \text{ von } v \text{ ausgeht,} \\ 1, & \text{falls } e \text{ nach } v \text{ zeigt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(B) \in \{-1, 0, 1\}$ für jede quadratische Teilmatrix B von M beliebiger Größe gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Wir betrachten den nachfolgend dargestellten *Tetraedergraphen* G auf den Ecken $V = \{1, 2, 3, 4\}$.



(a) Bestimmen Sie mit dem Matrix Tree Theorem die Anzahl der Spannbäume von G.

(b) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil (a), indem Sie die Spannbäume von G geeignet klassifizieren und dann direkt abzählen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Gegeben sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der vollständige bipartite Graph $K_{n,n}$ genau n^{2n-2} Spannbäume besitzt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Auf einer Party befinden sich $r \cdot s$ Paare. Die Männer sind nach ihrem Alter in r Gruppen zu jeweils s Männern und die Frauen nach ihrer Körpergröße in r Gruppen zu jeweils s Frauen eingeteilt.
Zeigen Sie, dass von den $r \cdot s$ Paaren auf der Party r Paare ausgewählt werden können, so dass dabei jede Alters- und jede Größengruppe vertreten ist.