UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Kombinatorik und Graphentheorie*
Sommersemester 2015

Blatt 7

Abgabe: Freitag, **19.6.2015 (!)**, bis 10:15 Uhr
in den Briefkasten 26 im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zwischen den Universitäten Kaiserslautern, Liège, Luxembourg, Metz, Nancy, Saarbrücken und Trier, die sich zur „Universität der Großregion“ zusammengeschlossen haben, soll ein eigenes Kommunikationsnetzwerk aufgebaut werden. Wir nehmen vereinfachend an, dass die Kosten, die für den Aufbau einer direkten Verbindung zwischen jeweils zwei der Standorte entstehen, proportional zu ihrer Luftlinienentfernung (siehe nachfolgende Tabelle, Angaben in km) sind.

	Kaisersl.	Liège	Luxemb.	Metz	Nancy	Saarbr.	Trier
Kaisersl.	–	206	125	121	143	61	88
Liège	206	–	100	175	221	187	125
Luxemb.	125	100	–	78	125	90	38
Metz	121	175	78	–	47	61	79
Nancy	143	221	125	47	–	85	123
Saarbr.	61	187	90	61	85	–	63
Trier	88	125	38	79	123	63	–

Bestimmen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal den Plan eines Netzwerks, das alle sieben Universitäten miteinander verbindet und dessen Aufbau zugleich die geringsten Kosten verursachen würde.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Jeder Baum hat höchstens ein perfektes Matching.

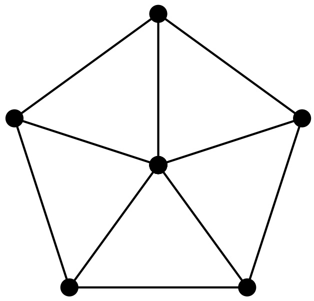
Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Finden Sie ein maximales Matching für den gewichteten bipartiten Graphen $K_{5,5}$ mit der Gewichtsmatrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

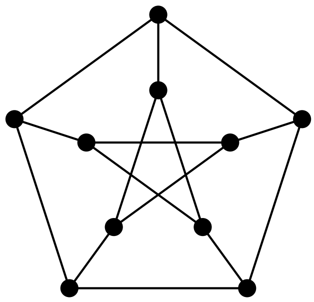
Zeigen Sie, dass es kein perfektes Matching größeren Gewichts geben kann, indem Sie eine Lösung zum dualen Problem, eine Überdeckung minimalen Gewichts zu finden, angeben.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie das chromatische Polynom und damit die chromatische Zahl des nachfolgend dargestellten *Wheel Graphen* W_5.



Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Wir betrachten wieder den folgenden Graphen G, den wir bereits in der Zusatzaufgabe auf Blatt 2 kennengelernt haben.



Zeigen Sie, dass für die Automorphismengruppe von G gilt $\mathrm{Aut}(G) \cong S_5$.

Hinweis: Konstruieren Sie den Graphen G auf der Vertexmenge V, die gegeben sei als die Menge aller zweielementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.