



Übungen zur Vorlesung *Kombinatorik und Graphentheorie*
Sommersemester 2015

Blatt 8

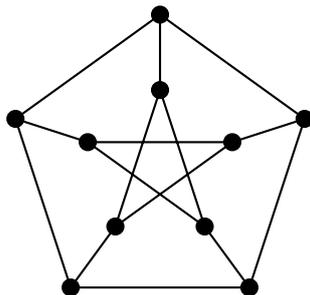
Abgabe: Freitag, 26.6.2015, bis 10:15 Uhr
in den Briefkasten 26 im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte). Die *Tailenweite* $\gamma(G)$ eines Graphen G ist definiert als die Länge des kürzesten Zyklus von G .

Zeigen Sie, dass die Zahl e der Kanten eines einfachen planaren Graphen mit n Ecken und der Tailenweite γ abgeschätzt werden kann durch

$$e \leq \frac{\gamma}{\gamma - 2}(n - 2).$$

Beweisen Sie damit, dass der nachfolgend dargestellte *Petersen Graph*, den wir bereits in den Zusatzaufgaben von Blatt 2 und Blatt 7 untersucht haben, nicht planar ist.



Aufgabe 2 (10 Punkte). Geben Sie ein Beispiel eines einfachen, planaren Graphen G mit der Eigenschaft $\delta(G) = 5$ (d.h. jede Ecke hat mindestens Grad 5) an und finden Sie eine zulässige 4-Färbung von G .

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei G ein Graph mit der chromatischen Zahl $\chi := \chi(G) > 3$ und dem Geschlecht $g := g(G) > 0$. Zeigen Sie, dass dann die folgende Ungleichung gilt:

$$g \geq \frac{1}{12}(\chi^2 - 7\chi + 12)$$

Folgern Sie, dass das Geschlecht des vollständigen Graphen K_n für $n \geq 5$ abgeschätzt werden kann durch

$$g(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}.$$

Zusatzaufgabe* (10 Punkte). Konstruieren Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ einen Graphen, der in den Torus eingebettet werden kann (d.h. er kann ohne Kreuzungen auf dem Torus gezeichnet werden), der aber mindestens k Kreuzungen liefert, wenn man ihn in der Ebene zeichnet.