UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Kombinatorik und Graphentheorie*
Sommersemester 2015

Blatt 10
Abgabe: Freitag, 10.7.2015, bis 10:15 Uhr
in den Briefkasten 26 im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Wieviele Teilnehmer muss es in einer Vorlesung mindestens geben, damit man unter diesen sicher drei Studenten finden kann, so dass je zwei von ihnen bereits an einer anderen Vorlesung gemeinsam teilgenommen haben oder je zwei sich noch nie zuvor in einer anderen Vorlesung getroffen haben?

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Seien P und P' zwei partiell geordnete Mengen, für die alle Mengen Λ_x bzw. $\Lambda_{x'}$ für $x \in P$ bzw. $x' \in P'$ endlich sind. Weiter seien μ_P und $\mu_{P'}$ die zugehörigen Möbius-Funktionen. Zeigen Sie:

(a) Die Produktmenge $P \times P' = \{(x, x') |\ x \in P,\ x' \in P'\}$ wird versehen mit der Ordnungsrelation

$$(x, x') \leq (y, y') \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x \leq y \quad \text{und} \quad x' \leq y'$$

ebenfalls zu einer partiell geordneten Menge, auf der eine Möbius-Funktion $\mu_{P\times P'}$ existiert. Diese erfüllt

$$\mu_{P\times P'}\big((x, x'), (y, y')\big) = \mu_P(x, y)\mu_{P'}(x', y')$$

für alle $(x, x') \leq (y, y')$. Ferner gilt $I(P \times P') \cong I(P) \otimes I(P')$.

(b) Sind P und P' *isomorph* (d.h. es gibt eine Bijektion $\phi : P \to P'$ mit der Eigenschaft, dass $x \leq y \Leftrightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$), dann gilt $\mu_P(x, y) = \mu_{P'}(\phi(x), \phi(y))$ für alle $x, y \in P$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Für festes $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2$, betrachten wir die Menge $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$. Zeigen Sie:

(a) Versehen wir $[N]$ mit der üblichen Ordnungsrelation $\leq$, so ist die zugehörige Möbiusfuktion μ gegeben durch

$$\mu(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } m = n, \\ -1, & \text{falls } m + 1 = n\ . \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

bitte wenden

(b) Versehen wir $[N]$ mit der Teilbarkeitsrelation $|$, so ist die zugehörige Möbiusfunktion gegeben durch

$$\mu(m,n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{falls } m|n \text{ und } \frac{n}{m} = p_1 \cdots p_k \text{ für } k \text{ paarweise} \\ & \text{verschiedene Primzahlen } p_1, \dots, p_k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hinweis zu (b): Betrachten Sie die Primfaktorzerlegung von N und verwenden Sie Aufgabenteil (a), sowie die Ergebnisse aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie die Siebformel aus Satz 6.8 der Vorlesung (vgl. Erinnerung 11.1) mithilfe der Möbius-Inversion aus Satz 11.6.

Hinweis: Für festes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die bezüglich Inklusion $\subseteq$ partiell geordnete Menge aller Teilmengen von $[n] = \{1, \dots, n\}$. Sind beliebige Teilmengen $A_1, \dots, A_n$ einer endlichen Menge gegeben und ist $A := \bigcup_{i=1}^n A_i$, so definieren wir für alle $\emptyset \neq I \subsetneq [n]$

$$F(I) := \Big(\bigcap_{i \in [n] \setminus I} A_i \Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} A_i \Big) \qquad \text{und} \qquad G(I) := \bigcap_{i \in [n] \setminus I} A_i,$$

sowie ferner $F([n]) := \emptyset$, $G([n]) := A$ und $F(\emptyset) := G(\emptyset) := \bigcap_{i \in [n]} A_i$. Überlegen Sie sich, dass $G(I)$ für festes $I \subseteq [n]$ die disjunkte Vereinigung aller Mengen $F(J)$ mit $J \subseteq I$ ist.