UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Kombinatorik und Graphentheorie*
Sommersemester 2015

Blatt 11
Abgabe: Freitag, 17.7.2015, bis 10:15 Uhr
in den Briefkasten 26 im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, für die alle Mengen Λ_x, $x \in P$, endlich sind.

(a) Zeigen Sie, dass die im Beweis von Satz 11.5 konstruierte Funktion $\mu \in I(P)$ tatsächlich ein Inverses der Zeta-Funktion $\zeta \in I(P)$ ist, d.h., dass nicht nur $\mu \cdot \zeta = \delta$, sondern auch $\zeta \cdot \mu = \delta$ gilt.

(b) Beweisen Sie allgemeiner, dass eine Funktion $\alpha \in I(P)$ genau dann in $I(P)$ invertierbar ist, wenn gilt

$$\alpha(x,x) \neq 0 \qquad \text{für alle } x \in P.$$

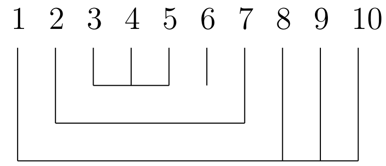
Folgern Sie daraus, dass alle links- bzw. rechts-invertierbaren Elemente von $I(P)$ bereits invertierbar sind.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{NC}(n)$ die Menge der *nichtkreuzenden Partitionen auf* $\{1, \ldots, n\}$: Eine Partition $\pi = \{V_1, \ldots, V_r\}$ von $\{1, \ldots, n\}$ heißt

- *kreuzend*, falls es $p_1 < q_1 < p_2 < q_2$ in $\{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass p_1 und p_2 beide in einem Block V_k und q_1 und q_2 beide in einem Block V_l liegen, wobei aber $k \neq l$,
- und *nichtkreuzend*, falls π nicht kreuzend ist.

Stellen wir Partitionen graphisch dar, dann sind die nichtkreuzenden – wie man es auch erwarten würde – gerade die, für die unter den Linien, die die Elemente eines Blocks miteinander verbinden, keine Kreuzungen auftreten. Beispielsweise ist

$\pi = \{(1,8,9,10),(2,7),(3,4,5),(6)\} \in \mathrm{NC}(10)$ $\quad\hat{=}\quad$



(a) Stellen Sie alle Partitionen in $\mathrm{NC}(n)$ für $n = 1,2,3,4,5$ analog zu obigem Beispiel graphisch dar.

bitte wenden

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, n$ bezeichnen wir mit $\mathrm{NC}^{(i)}(n)$ die Menge aller Partitionen $\pi \in \mathrm{NC}(n)$, für die i das größte Element in demjenigen Block V von π mit $1 \in V$ ist. Finden Sie Bijektionen

$$\mathrm{NC}^{(i)}(n) \to \mathrm{NC}^{(i)}(i) \times \mathrm{NC}(n-i) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{NC}^{(i)}(i) \to \mathrm{NC}(i-1).$$

(c) Zeigen Sie mithilfe von Aufgabenteil (b), dass die Anzahl der Elemente von $\mathrm{NC}(n)$ gegeben ist durch $|\,\mathrm{NC}(n)| = C_n$, wobei C_n die n-te *Catalan-Zahl* bezeichnet.
Die Folge $(C_n)_{n=0}^{\infty}$ der Catalan-Zahlen ist rekursiv bestimmt durch $C_0 := 1$ und

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i} \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $(L, \leq)$ eine endliche, partiell geordnete Menge mit den folgenden Eigeschaften:

- In $(L, \leq)$ gibt es ein maximales Element 1_L, d.h. es existiert ein Element $1_L \in L$, so dass $x \leq 1_L$ für alle $x \in L$ gilt.
- Für je zwei Elementen $x, y \in L$ besitzt die Menge

  $$\Lambda_{x,y} := \{z \in L|\ z \leq x \text{ und } z \leq y\}$$

  ein (eindeutiges) maximales Element $x \wedge y$, d.h. es gibt ein $x \wedge y \in \Lambda_{x,y}$, so dass $z \leq x \wedge y$ für alle $z \in \Lambda_{x,y}$ erfüllt ist.

Zeigen Sie, dass $(L, \leq)$ dann bereits ein Verband ist.

(b) Als Teilmenge der Menge aller Partitionen von $\{1, \dots, n\}$ stellt auch $\mathrm{NC}(n)$ eine partiell geordnete Menge dar. Beweisen Sie, dass $\mathrm{NC}(n)$ versehen mit dieser Ordnungsrelation sogar ein Verband ist.
Wie sehen das maximale und das minimale Element 0_n bzw. 1_n von $\mathrm{NC}(n)$ aus?

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Für alle $\pi, \sigma \in \mathrm{NC}(n)$ mit $\pi \leq \sigma$ setzen wir im Folgenden

$$[\pi, \sigma] := \{\tau \in \mathrm{NC}(n)|\ \pi \leq \tau \leq \sigma\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $\pi, \sigma \in \mathrm{NC}(n)$ mit $\pi \leq \sigma$ gibt es einen Verband-Isomorphismus

$$[\pi, \sigma] \cong \prod_{V \in \sigma} [\pi|_V, 1_{|V|}].$$

(b) Für alle $\sigma \in \mathrm{NC}(n)$ kann man eine kanonische Folge $(k_1, \dots, k_n)$ von nicht-negativen ganzen Zahlen finden, so dass es einen Verband-Isomorphismus gibt

$$[0_n, \sigma] \cong \ \mathrm{NC}(1)^{k_1} \times \mathrm{NC}(2)^{k_2} \times \cdots \times \mathrm{NC}(n)^{k_n}.$$

Bemerkung: Mit etwas mehr Aufwand (und unter Verwendung des sogenannten *Kreweras-Komplements* $\tau \mapsto K(\tau)$, mit dessen Hilfe man ein Intervall der Form $[\tau, 1_k]$ in $[0_k, K(\tau)]$ überführen kann) kann man zeigen, dass es zu jedem Intervall $[\pi, \sigma]$ eine kanonische Folge $(k_1, \dots, k_n)$ von nicht-negativen ganzen Zahlen gibt mit

$$[\pi, \sigma] \cong \ \mathrm{NC}(1)^{k_1} \times \mathrm{NC}(2)^{k_2} \times \cdots \times \mathrm{NC}(n)^{k_n}.$$