UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Kombinatorik und Graphentheorie*
Sommersemester 2015

Blatt 12
Abgabe: Freitag, 24.7.2015, bis 10:15 Uhr
in den Briefkasten 26 im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Erinnerung: Auf Blatt 11 haben wir die Menge $\mathrm{NC}(n)$ der nichtkreuzenden Partitionen von $\{1, \dots, n\}$ eingeführt und gesehen (oder uns zumindest davon überzeugen lassen),

... dass ihre Mächtigkeit gegeben ist durch die n-te Catalan-Zahl C_n,

... dass sie, versehen mit der von der Menge aller Partitionen $\mathcal{P}(n)$ eingeschränkten Ordnungsrelation $\leq$, nicht nur eine partiell geordnete Menge, sondern sogar einen Verband darstellt, und

... dass man für alle Intervalle $[\pi, \sigma]$ in $\mathrm{NC}(n)$ mit $\pi \leq \sigma$ eine *kanonische* Folge $(k_1, \dots, k_n)$ von nicht-negativen ganzen Zahlen bestimmen kann, für die es einen Verband-Isomorphismus gibt mit

$$[\pi, \sigma] \cong \mathrm{NC}(1)^{k_1} \times \mathrm{NC}(2)^{k_2} \times \cdots \times \mathrm{NC}(n)^{k_n}. \tag{1}$$

In den beiden folgenden Aufgaben wollen wir nun multiplikative Funktionen auf $\mathrm{NC} := (\mathrm{NC}(n))_{n=1}^{\infty}$ untersuchen, analog zu Kapitel 12 der Vorlesung, wo multiplikative Funktionen auf der Menge $\mathcal{P} := (\mathcal{P}(n))_{n=1}^{\infty}$ behandelt wurden.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge komplexer Zahlen.

- Wir können dann eine Familie $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ von Funktionen $F_n : \mathrm{NC}(n) \times \mathrm{NC}(n) \to \mathbb{C}$ aus der Inzidenzalgebra $I(\mathrm{NC}(n))$ definieren, indem wir
$$F_n(\pi, \sigma) := \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \cdots \alpha_n^{k_n}$$
setzen, falls $\pi \leq \sigma$ gilt und $(k_1, \dots, k_n)$ die kanonische Folge zu $[\pi, \sigma]$ gemäß (1) ist. Wir nennen dann $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ die *multiplikative Familie in* $I(\mathrm{NC})$ *zu* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Ferner können wir zu $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Familie $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ von Funktionen $f_n : \mathrm{NC}(n) \to \mathbb{C}$ definieren, indem wir
$$f_n(\pi) := \alpha_{|V_1|} \alpha_{|V_2|} \cdots \alpha_{|V_r|}$$
setzen für $\pi = \{V_1, \dots, V_r\} \in \mathrm{NC}(n)$. Wir nennen dann $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ die *multiplikative Familie auf* NC *zu* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$.

Beweisen Sie:

(a) Bezeichnen wir mit μ_n die Möbiusfunktion zu $\mathrm{NC}(n)$, dann ist $\mu = (\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ eine multiplikative Familie in $I(\mathrm{NC})$. (Man kann zeigen – was hier aber nicht verlangt ist – dass die zugehörige Folge $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ gegeben ist durch $\alpha_n = (-1)^{n-1} C_{n-1}$.)

bitte wenden

(b) Ist $(F_n)_{n=1}^\infty$ die multiplikative Familie in $I(\mathrm{NC})$ zu einer Folge $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ und $(f_n)_{n=1}^\infty$ die multiplikative Familie auf NC zu einer Folge $(\beta_n)_{n=1}^\infty$, dann wird durch

$$g_n(\sigma) := \sum_{\pi \leq \sigma} f_n(\pi) F_n(\pi, \sigma) \qquad \text{für } \sigma \in \mathrm{NC}(n)$$

eine weitere multiplikative Familie $g = f \cdot F$ auf NC definiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ die multiplikative Familie auf NC zu einer Folge $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$. Gemäß Aufgabe 1 ist dann auch $g := f \cdot \mu$ eine multiplikative Familie auf NC und wir bezeichnen mit $(\beta_n)_{n=1}^\infty$ die zugehörige Folge. Zeigen Sie: Die formalen Potenzreihen

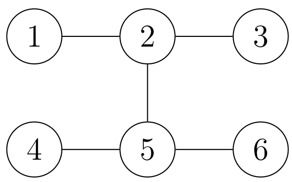
$$u(z) := 1 + \sum_{n=1}^\infty \alpha_n z^n \qquad \text{und} \qquad v(z) := 1 + \sum_{n=1}^\infty \beta_n z^n$$

erfüllen die Funktionalgleichungen

$$v(zu(z)) = u(z) \qquad \text{und} \qquad u\Big(\frac{z}{v(z)}\Big) = v(z).$$

Hinweis: Schreiben Sie $f_n = g_n \cdot \zeta_n$ und zerlegen Sie die in der Summe für $\alpha_n = f_n(1_n)$ auftretenden Partitionen $\pi \in \mathrm{NC}(n)$ in der Form $\pi = \{V_1\} \cup \tilde{\pi}_1 \cup \cdots \cup \tilde{\pi}_s$, wobei $V_1 = \{v_1, \ldots, v_s\}$ mit $1 = v_1 < v_2 < \cdots < v_s$ derjenige Block von π mit $1 \in V_1$ sei.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Auf der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ betrachten wir den folgenden Graphen $G = (V, E)$.



(a) Geben Sie explizit alle Elemente der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ von G (aufgefasst als Untergruppe von S_6) an. (**Hinweis:** Es gilt $|\mathrm{Aut}(G)| = 8$.)

(b) Die Gruppe $\mathrm{Aut}(G)$ operiert dann insbesondere auf der Kantenmenge E. Bestimmen Sie den zugehörigen Zykelzeiger $Z_{\mathrm{Aut}(G),E}$.

(c) Auf wie viele wesentlich verschiedene Weisen kann man die Kanten von G in den Farben Rot, Gelb und Grün färben? Mit anderen Worten: Bestimmen Sie

$$\big|\, \mathrm{Aut}(G) \backslash \mathrm{Abb}\big(E, \{\text{rot, gelb, grün}\}\big) \big|.$$

(d) Wie viele der in (c) betrachteten Färbungen enthalten genau zwei rote, eine gelbe und zwei grüne Kanten?

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Ein quadratisches Holzbrett wurde in 8×8 quadratische Felder aufgeteilt. Auf genau 8 von diesen 64 Feldern soll nun einer von 8 identischen Spielsteinen gesetzt werden. Auf wie viele wesentlich verschiedene Weisen (d.h. modulo Drehungen des Holzbretts) ist dies möglich?