Kombinatorik und Graphentheorie

Kombinatorik = Studium von endlichen (oder abzählbar unendlichen) diskreten Strukturen

Polya: Untersuchung des Abzählens, der Existenz und Konstruktion von Konfigurationen

unser Hauptaugenmerk: abzählende Kombinatorik

typisches Problem: gegeben Familie von endlichen Mengen S_i, für $i \in I$

(I Indexmenge, z.B. $I = \mathbb{N}$)

Finde $f(i) := \# S_i$ Anzahl der Elemente in S_i

in "einheitlicher Form für alle $i \in I$" !
gleichzeitig

Was heißt "finden"?

i) explizite Formel

ii) Summationsformel

iii) Rekursion

iv) erzeugende Funktionen

etc.

<u>Beispiele:</u> i) $S_n :=$ Teilmengen von $\{1,..,n\}$

$$= \{ A \mid A \subset \{1,..,n\} \}$$

Dann ist

$$f(n) := \# S_n = 2^n$$

<u>Notation:</u>

$$[n] := \{1,..,n\}$$

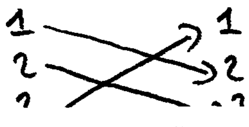
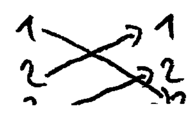
ii) $S_n :=$ Menge der Permutationen von $[n]$ ohne Fixpkt

$$= \{ \pi : [n] \to [n] \text{ Bijektion} \mid \pi(i) \neq i \ \forall i = 1,..,n \}$$

$\# S_n$ ist nicht so einfach zu zählen

$n = 1$: $\quad 1 \not\to 1 \qquad \# S_1 = 0$

$n = 2$:  $\qquad \# S_2 = 1$

$n = 3$:  oder  $\qquad \# S_3 = 2$

Daraus folgt dann einfach:

$f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=8$, $f(5)=13$

Dies sind die Fibonacci-Zahlen.

iv) Oft hat man keine explizite Form für $f(n)$, kann aber einfach (z. B. aus Rekursionen) eine Formel für die erzeugende Funktion

$F(x) := \sum_{n\geq 0} f(n)\, x^n$ (formale Potenzreihe in x)

ableiten.

Für die Fibonacci-Zahlen aus iii) gilt dies:

$$F(x) = 1 + x + \sum_{n\geq 2} f(n)\, x^n$$

$$= 1 + x + \sum_{n\geq 2} \big(f(n-1) + f(n-2)\big)\, x^n$$

$$= 1 + x + x\underbrace{\sum_{n\geq 2} f(n-1)\, x^{n-1}}_{F(x)-1} + x^2 \underbrace{\sum_{n\geq 2} f(n-2)\, x^{n-2}}_{F(x)}$$

$$= 1 + (x + x^2)\, F(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

Daraus kann man dann solche erstaunlichen Aussagen ableiten:

$f(n)$ = nächste ganze Zahl zu

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

z.B. $$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5+2}}{\sqrt{5}} \approx 12{,}985$$

und $f(5) = 13$

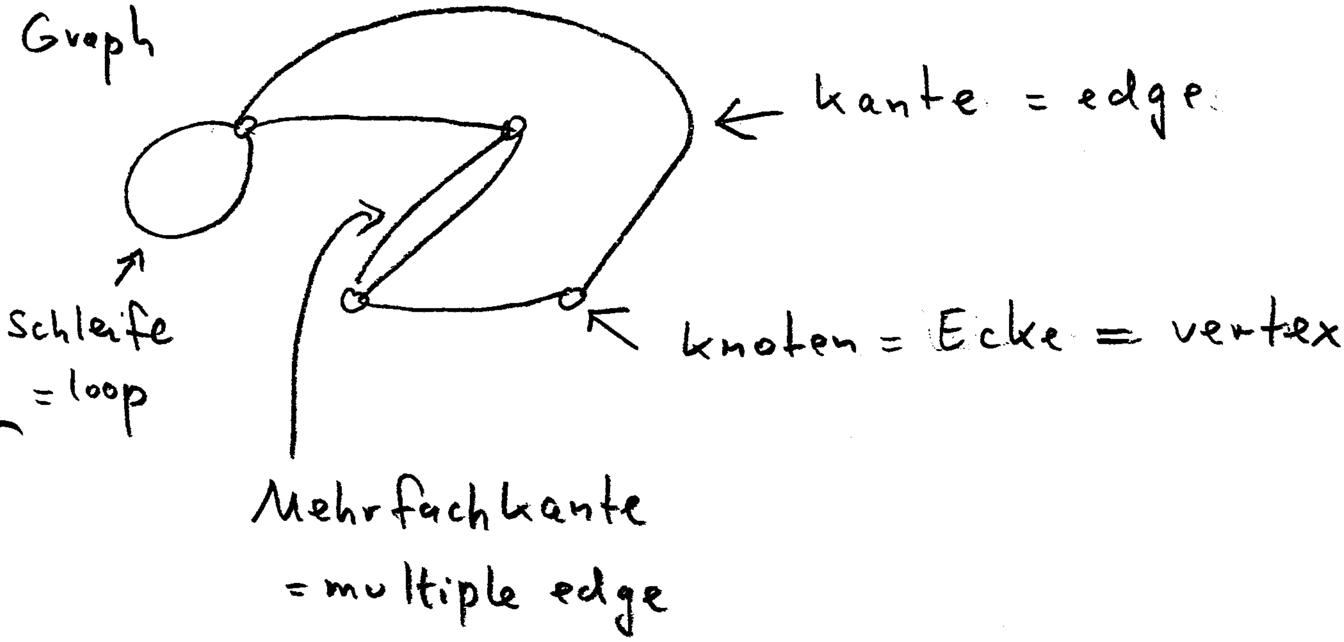
Als wichtige allgemeine Theorien in der abzählenden Kombinatorik werden wir kennenlernen:

i) Theorie der Möbiusinversion, als weitreichende Verallgemeinerung des Inklusions-Exklusions-Prinzips

ii) Theorie der erzeugenden Funktionen

Graphentheorie = Teilgebiet der Kombinatorik, wo die diskrete Struktur durch einen Graphen gegeben wird

Graph



Verfeinerungen: - gerichtete kanten
- verschiedene Typen von knoten (bipartit)
- gewichtete kanten

erstmaliges Auftauchen in der Mathematik:
Euler 1736 (Königsberger Brückenproblem)

Graphen dienen zur Modellierung oder Abstraktion von:

- Straßennetzen
- chemischen Molekülen
- elektrischen Netzwerken
- sozialen Beziehungen
- Internet ...

Wir werden Fragestellungen der folgenden Art ansprechen:

- Existenz von Wegen mit gewissen Eigenschaften im Graphen
- Zählen von speziellen Graphen
- Matching-Problem ("Heiratssatz")
- Färben von Graphen ⇝ Vierfarbenproblem
- Planarität von Graphen

etc.

Oft ist man auch daran interessiert, gute (exakte oder näherungsweise) Algorithmen für diese Probleme zu finden

Eventuell auch

- Zufallsgraphen (typische Eigenschaften)
- Irrfahrt auf Graphen