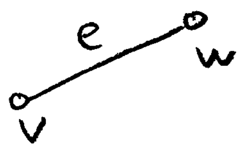
1. Grundlegende Definitionen zu Graphen

1.1. Def: 1) Ein *Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge von *Knoten* (= Ecken = Vertizes) $V = V(G)$ und einer Menge von *Kanten* $E = E(G)$, zusammen mit einer Inzidenzfunktion

$\psi : E \to \{ (v,w) \mid v, w \in V \}$ $\quad (v,w) \mathrel{\hat=} (w,v)$ ungeordnetes Paar

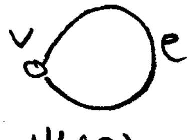
d.h. jedem $e \in E$ ordnen wir die beiden Knoten $\psi(e) = (v,w)$ zu, die es verbindet.

Wir sagen dann:



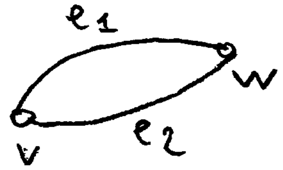
- e *verbindet* v und w
- v und w sind *benachbart* (oder verbunden oder Nachbarn); wir schreiben dafür $v \sim w$
- v und w sind Endpunkte von e

2) Eine *Schleife* ist eine Kante, deren Endpunkte übereinstimmen.



$\psi(e) = (v,v)$

Mehrfachkanten sind zwei oder mehr Kanten mit den gleichen Endpunkten.



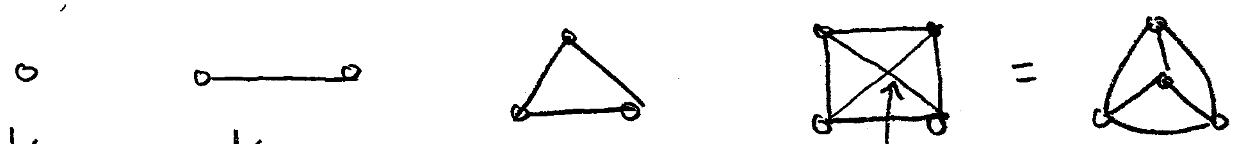
$\psi(e_1) = (v,w) = \psi(e_2)$

Vertices : $v_1, \dots, v_n$

Kanten : $v_i v_j \quad \forall\, i < j$

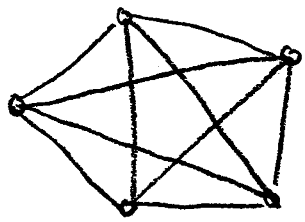
somit $\quad |E(K_n)| = \binom{n}{2}$

$$d(v) = n - 1 \qquad \forall\, v \in V(K_n)$$



K_1 $\quad$ K_2 $\quad$ K_3 $\quad$ kein Knoten

K_4



K_5

beachte: nicht jeder Graph kann in der Ebene gezeichnet werden ohne zusätzliche Nicht-Knoten - Schnittpkte

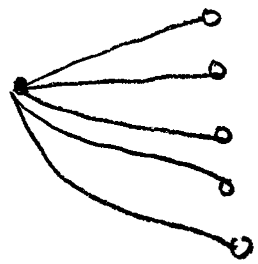
K_5 ist einfachste "nicht-planarer" Graph

4) $K_{n,m}$ = vollständige bipartit Graph mit (n,m) Knoten

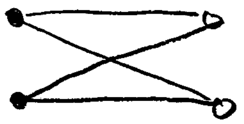
Vertices : $v_1, \dots, v_n, \; w_1, \dots, w_m$

Kanten : $v_i w_j \quad \forall \; \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array}$

$K_{1,5}$:



$K_{2,2}$:



<u>1.3. Satz</u> (Handschlag-Lemma, Handshaking Lemma):
Für einen Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

<u>Beweis</u>: Jede Kante hat zwei Endpunkte, wird also genau zweimal gezählt, wenn wir über alle Grade summieren.

[Beachte: dies gilt auch für Schleifen, da diese auch 2 zum Grad ihres Endpunktes beitragen.]

□