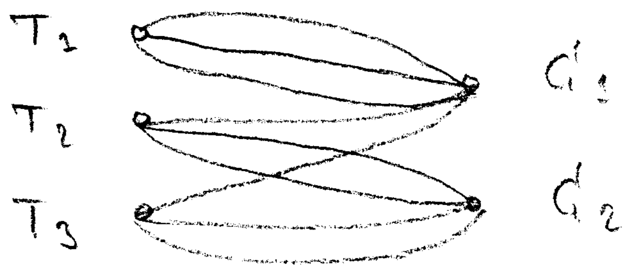
10. Kantenfärbungen

10.1 Motivation: Lehrer: $T_1, \dots, T_n$

Klassen: $C_1, \dots, C_m$

T_i unterrichtet Klasse C_j p_{ij} Stunden pro Woche. Wieviele verschiedene Zeitschlitze braucht man mindestens?



Kanten $\hat{=}$ Zeitschlitze $\hat{=}$ Farben

gleicher Lehrer oder gleiche Klasse $\hat{=}$ Konflikt

$\rightsquigarrow$ verschiedene Farben

d.h. benachbarte Kanten brauchen verschiedene Farben

10.2 Def.: 1) Zwei Kanten in einem Graph heißen <u>benachbart</u>, wenn sie einen gemeinsamen Endpunkt haben.

2) Eine <u>Kantenfärbung</u> eines Graphen G ist eine Abbildung

$f: E(G) \to S$ ($S \hat{=}$ "Farben")

Sie heißt zulässig, falls benachbarte Kanten verschiedene Farben haben.

3) Die kanten-chromatische Zahl $\chi'(G)$ ist die kleinste Anzahl von Farben, die man braucht für eine zulässige Kantenfärbung von G.

<u>10.3 Bem.</u>: 1) Falls G Schleifen hat, dann gibt es keine zulässige Kantenfärbung. Mehrfachkanten haben allerdings einen Einfluß auf χ'. Somit ist für Kantenfärbungsprobleme der Graph im Allgemeinen nicht einfach, aber ohne Schleifen.

2) Offensichtlich ist

$$\chi'(G) \geq \Delta(G) := \max_{v \in V(G)} d(v)$$

Es gilt aber auch

<u>Satz</u> (Vizing, Gupta 1964): Ist G ein einfacher Graph, dann gilt

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Somit gilt es für einfache G nur zwei Möglichkeiten:

$$\chi'(G) = \Delta(G) \quad \text{oder} \quad \chi'(G) = \Delta(G) + 1$$

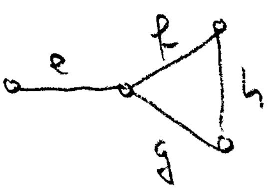
"class 1" "class 2"

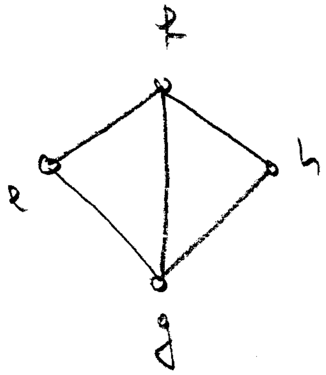
Zu entscheiden welche Klasse ein Graph hat, ist NP-hard

3) Ein Grund dafür, dass die Möglichkeiten für Kantenfärbungen in einfachen Graphen eingeschränkter sind als für Vertex-Färbungen, liegt darin, dass Kantenfärbungen ein Spezialfall von Vertex-Färbungen sind.

<u>10.4. Def</u>: Der <u>Kantengraph</u> (line graph) $L(G)$ eines Graphen G ist der Graph, dessen Ecken die Kanten von G sind und Ecken in $L(G)$ sind benachbart, falls es die entsprechenden Kanten in G sind.

<u>10.5. Beispiele</u>: 1)

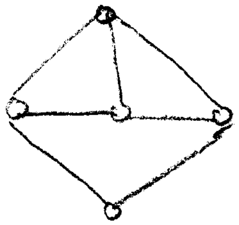
$G =$ 

$\Rightarrow L(G) =$ 

beachte: $K_3 =$ 

$\Rightarrow L(K_3) =$ 

$= L(K_{1,3}) \Leftarrow$ 

2)  ist nicht Kantengraph eines Graphen

3) zulässige Kantenfärbung für G
$\hat{=}$ zulässige Vertexfärbung für $L(G)$

<u>10.6. Satz:</u> Sei G ein Graph mit einer ungeraden Zahl von Vertizes n. Ist G k-regulär (d.h. $d(v) = k \ \forall v$), dann gilt:

$$\chi'(G) > k$$

<u>Beweis:</u> Seien $C_i := \{e \mid e$ ist mit Farbe i gefärbt$\}$

$\Rightarrow E(G) = C_1 \cup .. \cup C_r$

$\# C_i \leq \frac{n}{2}$, da jede Kante der Farbe i zwei Ecken verbraucht

$\Rightarrow \# C_i \leq \frac{n-1}{2}$ da n ungerade

$$\Rightarrow r \geq \frac{|E(G)|}{\frac{n-1}{2}} = \frac{k \cdot \frac{n}{2}}{\frac{n-1}{2}} > k$$ □

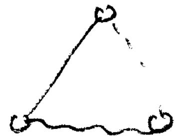
<u>10.7. Satz:</u> Es gilt

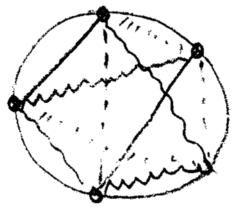
$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & n \text{ gerade} \\ n & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

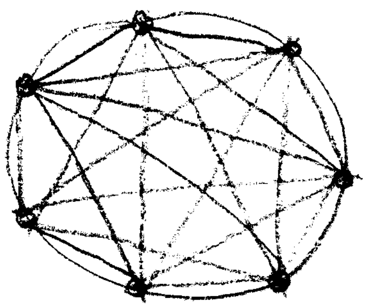
Beweis: i) n ungerade

$\overset{10.6}{\Longrightarrow}$ $\chi'(K_n) > n-1$

Eine zulässige Kantenfärbung mit n Farben ist wie folgt ("paralleles" Färben) gegeben.

K_3:  $\leadsto$ $\chi' = 3$

K_5:  $\leadsto$ $\chi' = 5$

K_7:  $\leadsto$ $\chi' = 7$

ii) n gerade

Entferne eine Ecke v

$\leadsto$ $K_n - v = K_{n-1}$

Färbe K_{n-1} zulässig mit $n-1$ Farben
An jeden Vertex von K_{n-1} fehlt eine Farbe (und diese ist verschieden für verschiedene Vertizes).
Benutze diese fehlende Farbe für die Kante, die diesen Vertex mit v verbindet.

10.8. Satz (König, 1916): Sei G ein bipartiter Graph. Dann gilt

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

Beweis: durch Induktion nach Anzahl der Kanten

$|E(G)| = 0$: $\chi'(G) = 0$, $\Delta(G) = 0$ ✓

Induktionsschritt: Sei U, V Bipartition von G

Entferne Kante $e = uv$ $(u \in U, v \in V)$.

Betrachte $G' := G - e$ auch bipartit

und $\Delta(G') \leq \Delta(G)$

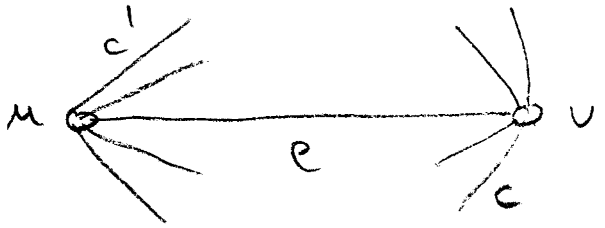
$\overset{\text{Ind. Vor.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ zulässige Kantenfärbung von G' mit $\leq \Delta(G)$ Farben

Falls diese nur $\Delta(G)-1$ Farben benutzt, so können wir zusätzliche Farbe für e benutzen

Betrachte den Fall: wir benutzen $\Delta(G)$ Farben für G'

Falls eine dieser Farben sowohl bei u als auch bei v fehlt $\rightarrow$ benutze diese Farbe für e

wir betrachten also: alle Farben tauchen bei $\{u, v\}$ auf



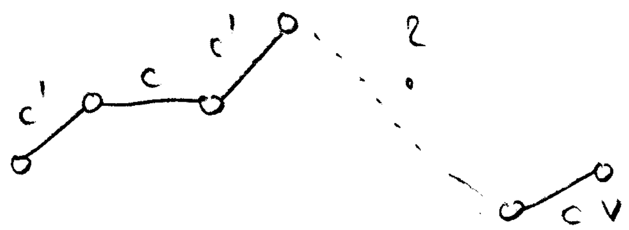
$d_{G'}(u) = d_G(u) - 1 \le \Delta(G) - 1$

$d_G(v) = d_G(v) - 1 \le \Delta(G) - 1$

$\Rightarrow \exists$ Farbe c : fehlt bei u, taucht auf bei v

c' : v u

– Betrachte nun Teilgraph von G', der nur aus Kanten mit Farben c und c' besteht. Sei $\tilde{G}$ die Komponente davon, die u enthält



– Falls $\tilde{G}$ auch v enthält

$\Rightarrow$ Weg von u nach v in G' zusammen mit e gibt ungeraden Zykel in G

$\Rightarrow$ Widsp zu G bipartit

$\Rightarrow$ G' enthält nicht v

Wir können dann Farben c und c' auf $\tilde{G}$ vertauschen $\leadsto$ ist auch zulässige Kantenfärbung von G'

c' bei u ist nun durch c ersetzt

keine Veränderung bei v

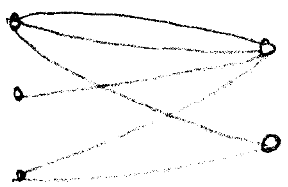
$\Rightarrow$ c' kann nun zum Färben von e benutzt werden $\square$

10.9. Beispiel: Lehrer $T_1, \ldots, T_n$

Klassen $C_1, \ldots, C_m$

T_i unterrichtet Klasse C_j p_{ij} Stunden pro Woche

$\overset{10.8}{\Rightarrow}$ Wir brauchen $p := \Delta(G)$ viele Zeitschlitze



$\rightsquigarrow$ 4 time slots

10.10 Schubfachprinzip: Wenn eine Menge von mindestens $kn+1$ Objekten in n Klassen zerlegt wird, dann enthält mindestens eine Klasse mindestens $k+1$ Objekte.

10.11. Bem: Das Prinzip ist trivial, hat aber, richtig angewandt, nicht-triviale Folgerungen, insbesondere gemäß dem Slogan

"Complete disorder is impossible" (Motzkin)

10.12. Satz (Erdős-Szekeres 1935):

Jede Folge von mindestens n^2+1 verschiedenen reellen Zahlen hat eine monotone Teilfolge der Länge $\geq n+1$.

10.13. Beispiel: $n=3$

4, 6, 8, 1, 3, 2, 9, 7, 5   Länge 9

hat keine monotone Teilfolge der Länge 4, allerdings erzeugt jede weitere Zahl eine solche Teilfolge

Beweis: Betrachte Folge $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$

Sei (x_k, y_k) def. durch $(k = 1, \dots, n^2)$

$x_k :=$ Länge der längsten aufsteigenden TF, die bei a_k endet

$y_k :=$ — " — absteigenden

— " —

Ann: Es gibt keine monotone Teilfolge der Länge $n+1$

$\Rightarrow 1 \leq x_k, y_k \leq n \quad \forall k = 1, \dots, n^2$

d.h. (x_i, y_i) kann nur n^2 viele Werte annehmen

$\overset{\text{Schubfach}}{\underset{\text{Prinzip}}{\Longrightarrow}} \quad \underset{\in [n^2+1]}{\exists i \neq j} : (x_i, y_i) = (x_j, y_j)$

Sei $i<j$; dann

$a_i < a_j \Rightarrow$ hänge a_j an die längste aufsteigende Folge, die bei a_i endet

Wdsp zu $x_i = x_j$

oder

$a_i > a_j \Rightarrow$ —— " —— absteigende

—— " ——

Wdsp zu $y_i = y_j$

$\square$

10.14. Satz: Bei 6 Personen ist es immer möglich eine Gruppe von drei zu finden, die sich gegenseitig kennen, oder eine Gruppe von drei, die sich gegenseitig nicht kennen.

Beweis: Wir modellieren die Situation durch eine Kantenfärbung von K_6

6 Vertizes $\hat{=}$ 6 Personen

blau $\hat{=}$ Fremde
rot $\hat{=}$ Bekannte

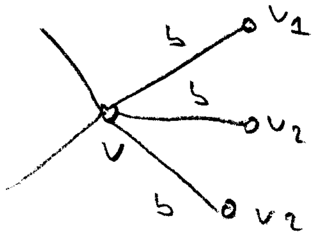
$\leadsto$ Beziehungen ergibt eine (nicht notwendigerweise zulässige) Kantenfärbung von K_3
Somit ist zu zeigen: Jede Kantenfärbung von K_6 enthält einen blauen K_3 oder einen roten K_3

dies gilt, da:

Wähle einen Vertex $v \in K_6$

$d(v) = 5 \overset{\text{Schub}}{\underset{\text{Fach}}{\Longrightarrow}}$ v hat mindestens 3 blaue oder drei rote einfallende Kanten

sei o. B. : mindestens drei blaue

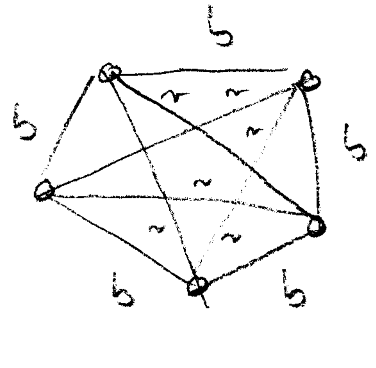


Wenn zwei der drei Vertizes v_1, v_2, v_3 durch blaue Kante verbunden $\rightsquigarrow$ blaues K_3

ansonsten: v_1, v_2, v_3 ergeben roten K_3 $\square$

<u>10.15 Bem:</u> 1) Beachte, dass 6 die kleinste Zahl ist, die ein einfarbiges Dreieck erzwingt:

Für K_5 gilt $\exists$ Färbung ohne solches



2) Was ist die kleinste Zahl von Personen um ein einfarbiges K_4 zu erzwingen?

Antwort: 18

3) Was ist die kleinste Zahl um ein einfarbiges K_5 zu erzwingen?

Antwort: unbekannt (zwischen 43 und 49)

10.16. Def:

Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist die <u>Ramsey-Zahl</u> $r(m,n)$ definiert als das kleinste $r \in \mathbb{N}$, für das jede Kantenfärbung von K_r mit den Farben Blau und Rot einen roten K_m oder blauen K_n enthält.

10.17 Bemerkung:

Überraschend wenige Ramsey-Zahlen sind bekannt. Die nicht-trivialen sind:

$m \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				
5	14	25					
6	18						
7	23						
8	28						
9	36						

10.18. Satz:

Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 2$ gilt:

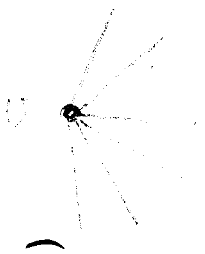
$$r(m,n) \leq r(m, n-1) + r(m-1, n)$$

Beweis: Wir setzen $r := r(m, n-1) + r(m-1, n)$.

zu zeigen: Jede Kantenfärbung von K_r enthält einen roten K_m oder blauen K_n.

Wähle $v \in V(K_r)$ und betrachte die inzidenten Kanten:

$$d(v) = r - 1 = r(m, n-1) + r(m-1, n) - 1$$

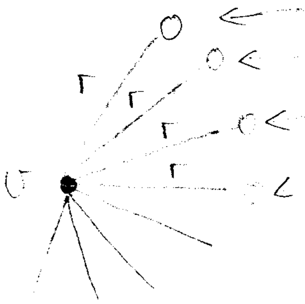


Also:

(1) # rote Kanten bei $v \geq r(m-1, n)$ oder

(2) # blaue Kanten bei $v \geq r(m, n-1)$

Wir betrachten Fall (1).



vollständiger Graph auf diesen Ecken enthält:

roten K_{m-1} oder blauen K_n

Zusammen mit der Ecke v liefert dies einen roten K_m.

in diesem Fall sind wir fertig.

Fall (2) behandelt man analog. □

10.12 Korollar:

Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$r(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$$

Beweis: $m, n = 1, 2$: klar, denn

$r(m,1) = r(1,m) = 1$ und

$r(m,2) = r(2,m) = m$.

Induktion nach $m+n$:

$$r(m,n) \leq r(m,n-1) + r(m-1,n)$$

$$\leq \binom{m+n-3}{m-1} + \binom{m+n-3}{m-2}$$

$$= \binom{m+n-2}{m-1}$$

$\square$

10.20. Satz (Erdős, 1947):

$$r(n,n) \geq 2^{n/2}$$

Beweis: Betrachte K_r:

Es gibt $2^{\binom{r}{2}}$ Rot-Blau-Färbungen, davon enthalten höchstens ...

- $\binom{r}{n} 2^{\binom{r}{2} - \binom{n}{2}}$ einen roten K_n.
- $\binom{r}{n} 2^{\binom{r}{2} - \binom{n}{2}}$ einen blauen K_n.

$\Longrightarrow$ Höchstens $2 \cdot \binom{r}{n} 2^{\binom{r}{2} - \binom{n}{2}}$ enthalten einen roten K_n oder einen blauen K_n.

Also: Falls $2 \cdot \binom{r}{n} 2^{\binom{r}{2} - \binom{n}{2}} < 2^{\binom{r}{2}}$, dann ist $r < r(\nu,\nu)$.

Die trivialen Abschätzungen

$$\binom{r}{\nu} < \frac{r^{\nu}}{\nu!} \quad \text{und} \quad \log(n!) \le n\cdot\log(n), \quad \nu! \ge 2^{\nu-1}$$

liefern dann die Behauptung. □

<u>Beachte:</u> Diese Abschätzungen

$$2^{\nu/2} \le r(\nu,\nu) \le \binom{2\nu-2}{\nu-1}$$

sind sehr grob,

z.B. <u>$\nu = 4$:</u> $4 = 2^2 \le r(4,4) \le \binom{6}{3} = 20$,
wobei $r(4,4) = 18$

<u>$\nu = 6$:</u> $8 = 2^3 \le r(6,6) \le \binom{10}{5} = 252$.
Bekannt ist $102 \le r(6,6) \le 165$

Von großem Interesse sind Sätze dieser Art für arithmetische Progressionen.

<u>Satz von van der Waerden (1927):</u>

Für alle $r, \ell \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass jede Färbung von $\{1,\dots,N\}$ mit r Farben eine einfarbige arithmetische Progression der Länge ℓ besitzt.

$W(r,k)$ = minimales N mit dieser Eigenschaft

z. B. gilt $W(2,3) = 9$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\underline{b}$	r	$\overline{r}$	b	$\underline{b}$	$\overline{r}$	r	b	$\underline{b}$ / $\overline{r}$

keine einfarbige arithmetische Progression der Länge 3

Es sind nur sehr grobe Abschätzungen für $W(r,k)$ bekannt. Die beste (und ziemlich nicht-triviale) Abschätzung ist momentan

$$W(r,k) \leq 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}} \qquad \text{(Gowers, 2001)}$$

Ronald Graham hat 1000 Dollar für einen Beweis ausgelobt, dass

$$W(2,k) < 2^{k^2}.$$

Gegenwärtig stehen einige große Arbeiten der Mathematik in diesem Zusammenhang:

- Green + Tao (2004):

  Die Folge der Primzahlen enthält beliebig lange arithmetische Progressionen.

- Polymath-Projekte (initiiert von Gowers, Tao)

  – zum Hales-Jewett-Theorem.

  „Is massively collaborative mathematics possible?"