11. Möbius Inversion und Verbände

11.1. Erinnerung: („Siebformel")

In Kapitel 6 haben wir verwendet, dass für beliebige Teilmengen $A_1, \dots, A_n$ einer endlichen Menge gilt (vgl. Satz 6.8)

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| .$$

Dahinter verbirgt sich ein wesentlich allgemeineres Konzept, die Möbius Inversion.

11.2. Def: Eine partiell geordnete Menge $(P, \leq)$ (engl. „Poset") ist eine Menge P, versehen mit einer binären Operation $\leq$, die

- reflexiv (d.h. $x \leq x$)
- antisymmetrisch (d.h. $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$)
- transitiv (d.h. $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$)

ist. Für $x \in P$ setzen wir

$$\Lambda_x := \{ y \in P \mid y \leq x \}.$$

Beispiele: (i) Teilmengen von $[n]$, $\leq$ Inklusion

(ii) Teiler von n, $\leq$ Teilbarkeit

(iii) Partitionen von $[n]$, $\leq$ Verfeinerung

11.3. Def: Ist $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, für die alle Λ_X, $X \in P$, endlich sind, dann ist die Inzidenzalgebra $I(P)$ gegeben als

$$\{\alpha : P \times P \to \mathbb{C} \mid \alpha(X,Y) = 0, \text{ falls nicht } X \leq Y\},$$

versehen mit der Multiplikation

$$(\alpha \cdot \beta)(X,Y) := \sum_{X \leq Z \leq Y} \alpha(X,Z)\beta(Z,Y)$$

und dem Einselement

$$\delta(X,Y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } X = Y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

11.4. Beispiel: Die Zeta-Funktion ζ,

$$\zeta(X,Y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } X \leq Y, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gehört zu $I(P)$.

11.5. Satz: Die Zeta-Funktion ζ ist in $I(P)$ invertierbar, d. h. es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $\mu \in I(P)$ mit

$$\zeta \cdot \mu = \delta = \mu \cdot \zeta, \qquad (*)$$

die Möbius-Funktion $\mu = \mu_P$ zu P.

Beweis: Die Bedingung (*) ist äquivalent zu

$$\sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(Z, Y) = \delta(X, Y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } X = Y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(X, Z) = \delta(X, Y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } X = Y \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir definieren daher $\mu : P \times P \to \mathbb{C}$ durch

- $\mu(X, Y) = 0$, falls nicht $X \leq Y$,
- $\mu(X, X) = 1$ für alle $X \in P$,
- $\mu(X, Y) = - \sum_{\substack{X \leq Z \leq Y \\ Z \neq Y}} \mu(X, Z)$,

induktiv für alle $X \leq Y, X \neq Y$. $\square$

11.6. Satz (Möbius Inversion)

Sei $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, für die alle Δ_X, $X \in P$, endlich sind. Sind Funktionen

$$f, g : P \longrightarrow \mathbb{C}$$

gegeben, so gilt

$$g(Y) = \sum_{X \leq Y} f(X) \qquad \forall Y \in P$$

genau dann, wenn

$$f(Y) = \sum_{X \leq Y} g(X) \mu(X, Y) \qquad \forall Y \in P.$$

Beweis: $I(P)$ operiert von rechts auf dem Vektorraum $\{f : P \to \mathbb{C}\}$ durch

$$(f \cdot \alpha)(y) := \sum_{x \leq y} f(x)\,\alpha(x,y).$$

Die Behauptung des Satzes lautet damit

$$f \cdot \zeta = g \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \cdot \mu$$

und ist nach Satz 11.5. klar. In der Tat gilt etwa "$\Longrightarrow$", weil für alle $y \in P$

$$\begin{aligned}\sum_{x \leq y} g(x)\,\mu(x,y) &= \sum_{x \leq y} \mu(x,y) \sum_{z \leq x} f(z) \\ &= \sum_{z \leq y} f(z) \underbrace{\sum_{z \leq x \leq y} \mu(x,y)}_{= \delta(z,y)} \\ &= f(y).\end{aligned}$$

$\square$

11.7. Beispiel:

Betrachte $(P, \leq) = (\{A \subseteq [n]\}, \subseteq)$. Dann gilt

$$\mu(A,B) = \begin{cases} (-1)^{|B|-|A|}, & \text{falls } A \subseteq B \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Induktion nach $k := |B| - |A|$ für $A \subseteq B$!

$k = 0$: $B = A$, d.h. $\mu(A,B) = 1$ ✓

$k \to k+1$:

$$\mu(A,B) = -\sum_{\substack{A\subseteq C\subseteq B\\ C\neq B}} \mu(A,C)$$

$$\overset{\text{Ind Vor}}{=} -\sum_{\substack{A\subseteq C\subseteq B\\ C\neq B}} (-1)^{|C\setminus A|}$$

$$= -\sum_{X\subsetneqq B\setminus A} (-1)^{|X|} \qquad (X = C\setminus A)$$

$$= (-1)^{|B\setminus A|},$$

denn $0 = (1-1)^{|B\setminus A|} = \sum_{X\subseteq B\setminus A} (-1)^{|X|}$. $\square$

11.8. Korollar:

$$\#\{F : [n]\to[k] \mid F \text{ surjektiv}\} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} \ell^n \qquad \text{für alle } 1\le k\le n$$

Beweis: Für $A\subseteq [k]$ sei

$$f(A) := \#\{F : [n]\to A \mid F \text{ surjektiv}\}$$

$$g(A) := \#\{F : [n]\to A\} = |A|^n$$

$$\Longrightarrow \quad g(A) = \sum_{B\subseteq A} f(B).$$

Nach Satz 11.6 und Beispiel 11.7:

$$f([k]) = \sum_{B \subseteq [k]} (-1)^{k-|B|} |B|^n$$

$$= \sum_{e=0}^{k} \underbrace{\left(\sum_{\substack{B \subseteq [k] \\ |B|=e}} 1 \right)}_{= \binom{k}{e}} (-1)^{k-e} e^n$$

$\square$

Durch geeignete Wahl von f und g auf $(\{A \subseteq [n]\}, \subseteq)$ folgt aus Satz 11.6 auch die Siebformel aus Satz 6.8 (vgl. Erinnerung 11.1)
$\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe!

<u>11.9. Beispiel:</u> Versehen mit der Teilbarkeitsordnung ist $\mathbb{N}$ eine partiell geordnete Menge, für die $\Delta_n = \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ ist Teiler von } n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ endlich ist.

Die Möbiusfunktion ist hier gegeben durch

$$\mu(m,n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{falls } \frac{n}{m} = p_1 \cdots p_k \text{ für } k \text{ verschiedene Primzahlen } p_1, \ldots, p_k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ist $(P, \leq)$ sogar ein Verband, dann hat auch μ_P mehr Struktur.

11.10 Def: Ein <u>Verband</u> $(L, \leq)$ ("<u>lattice</u>") ist eine partiell geordnete Menge mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

(i) $\forall x, y \in L \;\; \exists!\; x \vee y \in L$: ("<u>join</u>")
- $x \vee y \geq x$ und $x \vee y \geq y$
- $\forall z \in L$: $z \geq x$ und $z \geq y \implies z \geq x \vee y$

(ii) $\forall x, y \in L \;\; \exists!\; x \wedge y \in L$: ("<u>meet</u>")
- $x \wedge y \leq x$ und $x \wedge y \leq y$
- $\forall z \in L$: $z \leq x$ und $z \leq y \implies z \leq x \wedge y$

Ist $(L, \leq)$ ein <u>endlicher</u> Verband, so gibt es in $(L, \leq)$

- ein eindeutiges minimales Element 0_L,
- ein eindeutiges maximales Element 1_L,

so dass $0_L \leq x \leq 1_L$ für alle $x \in L$ gilt.

<u>11.11. Satz</u> (Weisner): Ist μ die Möbius-Funktion eines endlichen Verbands $(L, \leq)$, $\#L \geq 2$, so gilt

$$\sum_{x:\, x \vee a = 1_L} \mu(0_L, x) = 0 \qquad \forall a \in L,\; a \neq 0_L.$$

<u>Beweis:</u>

$$\sum_{x:\, x \vee a = 1_L} \mu(0_L, x) = \sum_{x \in L} \mu(0_L, x) \underbrace{\sum_{y \geq x \vee a} \mu(y, 1_L)}_{= \delta(x \vee a,\, 1_L)}$$

$$= \sum_{y \geq a} \mu(y, 1_L) \underbrace{\sum_{x \leq y} \mu(0_L, x)}_{= \delta(0_L, y) = 0} = 0$$

$\square$

11.12. Bem: 1) Durch "Umdrehen" der Ordnung, d.h.

$$x \leq_{neu} y \;:\Leftrightarrow\; x \geq_{alt} y$$

wird aus einem Verband ein neuer "dualer" Verband, wobei sich $\vee$ und $\wedge$ und 0 und 1 vertauschen, und $\mu_{neu}(x,y) = \mu_{alt}(y,x)$

2) Wir haben somit auch automatisch die folgende duale Version von 11.11:

$$\sum_{\substack{x \\ x \wedge a = 0_L}} \mu(x, 1_L) = 0 \qquad \forall\, a \in L,\ a \neq 1_L$$

11.13. Notation: $\circledast$

11.14 Beispiel: Wir betrachten

$P(n) := \{$ Partitionen von $[n]\}$

$\hookrightarrow \pi = \{B_1, \dots, B_k\}$ mit

- $\emptyset \neq B_i \subset [n]$
- $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = [n]$

B_i's heißen Blöcke von π

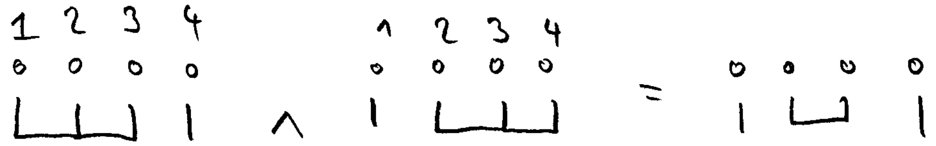
mit "Verfeinerung" $\leq$:

$\pi \leq \sigma \;:\Leftrightarrow$ Jeder Block von π ist in einem Block von σ enthalten

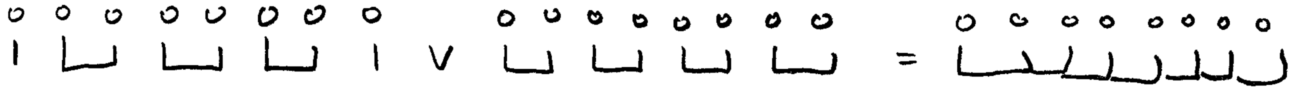
z.B. $\{\{1,2,4\},\{3\}\} \leq \{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$

1) Der Poset $(P(n), \le)$ ist ein Verband, wobei:

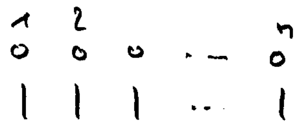
i) $\pi \wedge \sigma = \{$ Durchschnitte $B \cap C \neq \emptyset$ der Blöcke $B \in \pi$ und $C \in \sigma \}$



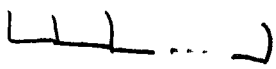
ii) $\pi \vee \sigma \;\hat{=}\;$ s, t im gleichen Block, falls es eine Kette von Blöcken in π und σ gibt, durch die sie verbunden sind



iii) $0_n := 0_{P(n)} = \{\{1\},\{2\},\dots,\{n\}\}$



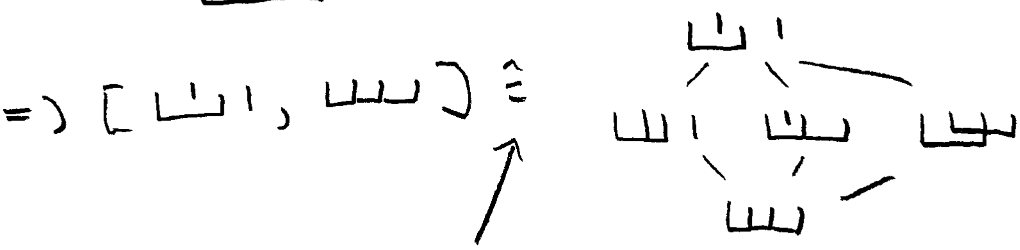
iv) $1_n := 1_{P(n)} = \{\{1,2,\dots,n\}\}$



2) Sei $\pi = \{B_1,\dots,B_k\} \in P(n)$

$\Rightarrow [\pi, 1_n] \cong P(k)$ (Jeder Block B_i in π entspricht einem Pkt i in $[k]$)

$\pi =$ 



als Poset isomorph

Betrachte jetzt $\sigma \le \pi$ mit $\pi = \{B_1,\dots,B_k\}$

Sei $\lambda_i :=$ # Blöcke in die B_i in σ zerfällt

$\Rightarrow [\sigma, \pi] \cong P(\lambda_1) \times P(\lambda_2) \times \dots \times P(\lambda_k)$

z.B. $[\{13|2|4|5|6\},\ \{13|24|56\}]$

$\hat{=}\ [\{13\},\{13\}] \times [\{2|4\},\{24\}] \times [\{5|6\},\{56\}]$

$\hat{=}\ \mathcal{P}(1) \times \mathcal{P}(2) \times \mathcal{P}(2)$

3) Betrachte jetzt Möbiusfunktion $\mu(\sigma,\pi)$

Falls $[\sigma,\pi] \cong \mathcal{P}(\lambda_1) \times \dots \times \mathcal{P}(\lambda_k)$

$\overset{\text{Blatt 10}}{\underset{\text{Auf 2}}{\Longrightarrow}}\quad \mu(\sigma,\pi) = \mu(0_{\lambda_1}, 1_{\lambda_1}) \dots \mu(0_{\lambda_k}, 1_{\lambda_k})$,

somit ist μ durch $\mu(0_n, 1_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bestimmt.

Betrachte dazu Satz von Weisner, in dualer Form von 11.12:

$a = \{\{1,2,\dots,n-1\},\{n\}\} \in \mathcal{P}(n)$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(n) \\ \pi \wedge a = 0_n}} \mu(\pi, 1_n) = 0$$

$\hookrightarrow\ \pi = 0_n$ oder

$\pi = \pi_i = \{\{1\},\{2\},\dots\{i,n\},\dots\{n-1\}\}$

$\qquad (1 \le i \le n-1)$

$[\pi_i, 1_n] \cong \mathcal{P}(n-1) \quad \forall i$

$\Rightarrow \mu(0_n, 1_n) + (n-1)\,\mu(0_{n-1}, 1_{n-1}) = 0$

$\Rightarrow \mu(0_n, 1_n) = -\mu(0_{n-1}, 1_{n-1})$

Somit gilt

11.15 Satz: Die Möbiusfunktion auf den Verbänden $P(n)$ ist bestimmt durch

$$\mu(0_n, 1_n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

11.13 Notation: Für einen endlichen Poset $(P, \leq)$ setzen wir für $x \leq y$

$$[x, y] := \{z \in P \mid x \leq z \text{ und } z \leq y\}$$

z. B. i) gilt in einem Verband L dann

$$[0_L, 1_L] = L$$

ii) $(P, \leq) = (\{A \subseteq [n]\}, \subseteq)$

$$\Rightarrow [A, B] = \{G \subset [n] \mid A \subseteq G \subseteq B\}$$
für $A \subseteq B$

Falls $x \nleq y$, so setzen wir

$$[x, y] = \emptyset$$

Beachte: Funktionen der Inzidenzalgebra $I(P)$ sind eigentlich Funktionen auf Intervallen:

$$\alpha(x, y) \mathrel{\hat{=}} \alpha([x, y])$$