12. Multiplikative Funktionen auf dem Verband der Partitionen und die Exponentialformel

12.1. Motivation: Beachte dass die Möbiusfkt μ_n auf $P(n)$ gemäß 11.14 durch die Werte $\mu(0_m, 1_m)$ auf allen $P(m)$ gemäß der Faktorisierung von Intervallen

$$[\sigma, \pi] \cong P(\lambda_1) \times .. \times P(\lambda_k)$$

durch

$$\mu(\sigma, \pi) = \mu(0_{\lambda_1}, 1_{\lambda_1}) .. \mu(0_{\lambda_k}, 1_{\lambda_k})$$

bestimmt ist.

μ ist eine "multiplikative" Funktion auf $P := \bigcup_n P(n)$

12.2. Def.: 1) Sei $\sigma \leq \pi$ in $P(n)$.
Wenn wir die kanonische Faktorisierung

$$[\sigma, \pi] \cong P(1)^{k_1} \times P(2)^{k_2} \times .. \times P(n)^{k_n}$$

$(k_1, .., k_n \in \{0, 1, .., n\})$

haben, so schreiben wir

$$\mathrm{Typ}[\sigma, \pi] = (k_1, k_2, .., k_n)$$

[beachte: $\# \pi = \sum k_i$, $\# \sigma = \sum i \cdot k_i$]

2) Sei $P = \dot\bigcup P(n) \hat{=} (P(1), P(2), P(3) \dots)$

Ein $f = (f_1, f_2, \dots) \in I(P) = \dot\bigcup I\,P(n)$

$(f_n \in I(P(n)))$

heißt <u>multiplikativ</u>, falls für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \le \pi \in P_n$ gilt:

$$f_n[\sigma, \pi] = f_1[0_1, 1_1]^{k_1} \cdot f_2[0_2, 1_2]^{k_2} \cdots$$

$$\dots f_n[0_n, 1_n]^{k_n}$$

falls $\mathrm{Typ}[\sigma, \pi] = (k_1, k_2, \dots, k_n)$

f ist in dem Fall durch die Folge $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f(n) := f_n[0_n, 1_n]$ bestimmt; wir schreiben dann $f = (f(1), f(2), \dots)$

Wir bezeichnen die Menge der multiplikativen Funktionen auf P mit $M(P)$.

<u>12.3. Satz</u>: Die δ, ζ und μ-Funktionen auf P sind multiplikativ mit

$$\delta = (1, 0, 0, \dots)$$

$$\zeta = (1, 1, 1, \dots)$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots) \text{ mit } \mu_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

<u>Beweis</u>: Für μ, siehe 11.14 und 11.15

Für δ, ζ: klar $\square$

12.4. Satz: Sind f und g multiplikativ auf P, dann ist auch $f \cdot g$ multiplikativ.

Beweis: $(f \cdot g)(\sigma, \pi) =$

$$= \sum_{\substack{\tau \in P(n) \\ \sigma \leq \tau \leq \pi}} f(\sigma, \tau) \cdot g(\tau, \pi)$$

$$\begin{array}{ccccc} [\sigma, \pi] & \cong & P(\lambda_1) & \times \dots \times & P(\lambda_k) \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ \tau & \cong & \tau_1 & , \dots , & \tau_k \end{array}$$

$$\sum_{\sigma \leq \tau \leq \pi} = \sum_{\tau_1 \in P(\lambda_1)} \dots \sum_{\tau_n \in P(\lambda_k)}$$

$$f(\sigma, \tau) = f(0_{\lambda_1}, \tau_1) \dots f(0_{\lambda_k}, \tau_k)$$

$$g(\tau, \pi) = g(\tau_1, 1_{\lambda_1}) \dots g(\tau_k, 1_{\lambda_k})$$

$$\Rightarrow (f \cdot g)(\sigma, \pi) =$$

$$= \sum_{\tau_1 \in P(\lambda_1)} \dots \sum_{\tau_k \in P(\lambda_k)} f(0_{\lambda_1}, \tau_1) g(\tau_1, 1_{\lambda_1}) \dots f(0_{\lambda_k}, \tau_k) g(\tau_k, 1_k)$$

$$= (f \cdot g)(0_{\lambda_1}, 1_{\lambda_1}) \dots (f \cdot g)(0_{\lambda_k}, 1_{\lambda_k})$$

$\square$

12.5. Bem: $f \cdot g$ ist bestimmt durch

$$f \cdot g(n) = f \cdot g(0_n, 1_n)$$

$$= \sum_{\substack{\pi \in P(n) \\ \pi = \{B_1, \dots, B_k\}}} \underbrace{f(0_n, \pi)}_{f(\# B_1) \cdots f(\# B_k)} \cdot \underbrace{g(\pi, 1_n)}_{g(k)}$$

Diese Beziehung zwischen $(f(n))_n$, $(g(n))_n$ und $(f \cdot g(n))_n$ kann als Relation zwischen erzeugenden Potenzreihen umgeschrieben werden.

12.6. Notation: Für eine Folge $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir mit

$$E_f(x) = \sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!}$$

die exponentielle erzeugende Funktion. Dies ist eine formale Potenzreihe in der Variablen x.

12.7. Satz: Setzen wir $g(0) = 1$, $f(0) = 0$ und $f \cdot g(0) = 1$, dann gilt

$$E_{f \cdot g}(x) = E_g[E_f(x)]$$

im Sinne der Komposition von formalen Potenzreihen. (Beachte dazu, dass E_f keinen konstanten Term hat.)

<u>Beweis:</u> $E_{f\cdot g}(x) =$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} f\cdot g(n) \, \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{\substack{\pi\in P(n)\\ \pi=\{B_1,..,B_k\}}} f(\#B_1)\dots f(\#B_k)\cdot g(k)\cdot \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1}\sum_{k\leq n}\sum_{\substack{1\leq b_1,..,b_k\leq n\\ b_1+..+b_k=n}} f(b_1)..f(b_k)\cdot g_k\cdot \frac{x^n}{n!} \cdot \underbrace{\binom{n}{b_1,..,b_k}\cdot\frac{1}{k!}}_{\text{\# Möglichkeiten, } \pi \text{ zu wählen mit vorgegebener Blockgröße}}$$

$$\frac{n!}{b_1!\dots b_k!}$$

$$= 1 + \sum_{k\geq 1}\sum_{b_1,..,b_k\geq 1} f(b_1)\cdot\frac{x^{b_1}}{b_1!}\dots f(b_k)\,\frac{x^{b_k}}{b_k!}\cdot g(k)\cdot\frac{1}{k!}$$

$$= 1 + \sum_{k\geq 1}\left(E_f(x)\right)^k\cdot g(k)\cdot\frac{1}{k!}$$

$$= E_g\left[E_f(x)\right] \qquad \square$$

<u>12.8. Korollar:</u> Sei $f(0)=0$, dann gilt

$$E_{f\cdot S}(x) = \exp\{E_f(x)\} \qquad (*)$$

<u>Beweis:</u> $S(n) = 1 \quad \forall n$

$$\Rightarrow E_S(x) = \sum_{n\geq 0} 1\cdot\frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \square$$

12.9. Bem: 1) Die Exponentialformel (*) ist von grundlegender Bedeutung in vielen Bereichen, sie verknüpft das Zählen aller Objekte in einer Klasse mit dem Zählen aller unzerlegbaren Objekte in der Klasse. Oft benutzt man auch die inverse Form

$$E_{h \cdot \mu}(x) = \log\{E_h(x)\} \qquad (**)$$

2) Mit (**) erhält man z. B. direkt den Wert $\mu(0_n, 1_n) = \mu(n)$ der Möbiusfunktion auf P: $h = \delta$ liefert

$$E_\mu(x) = \log\{E_\delta(x)\}$$
$$= \log(1 + x)$$
$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$
$$= \sum \frac{\mu(n)}{n!} x^n \qquad \text{für } \mu(n) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

3) Man kann auch $\# P(n)$ zählen. Dazu beachte, dass

$$\zeta \cdot \zeta(n) = \zeta \cdot \zeta(0_n, 1_n)$$
$$= \sum_{\pi \in P(n)} \underbrace{\zeta(0_n, \pi)}_{=1} \cdot \underbrace{\zeta(\pi, 1_n)}_{=1}$$
$$= \# P(n)$$

(*) liefert dann

$$E_{S\cdot S}(x) = \exp\{E_S(x)\}$$
$$= \exp\{e^x - 1\}$$
$$= \sum_{n\geq 0} B_n \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Die <u>Bell-Zahlen</u> B_n sind durch diese erzeugende Reihe definiert. Es gibt keine einfache "explizite" Formeln für B_n.

$$\exp\{e^x - 1\} = 1 + \Big(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!}\Big)^2 + \frac{1}{6}\Big(\sum \frac{x^n}{n!}\Big)^3 + \dots$$
$$= 1 + x\underbrace{(1)}_{B_1=1} + \frac{x^2}{2!}\underbrace{(1+1)}_{B_2=2} + \frac{x^3}{3!}\underbrace{(1+3+1)}_{B_3=5} + \dots$$

4) Oft ist es besser, den Zusammenhang zwischen den Potenzreihen durch Rekursionen zwischen den Koeffizienten zu beschreiben.

Sei $h = f\cdot S$, d.h.

$$h(n) = \sum_{\substack{\pi\in P(n)\\ \pi=\{B_1,\dots,B_k\}}} f(\#B_1)\dots f(\#B_k)$$
$$= \sum_{B_1 = \{1,\dots\}} f(\#B_1) \sum_{\tilde{\pi}=\{B_2,\dots,B_k\}} f(\#B_2)\dots f(\#B_k)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(i)\binom{n-1}{i-1}\cdot h(n-i)$$
$(i = \#B_1)$

Dies ergibt dann z. B. für die Bellzahlen ($f = \zeta$, d. h. $f(i) = 1$ $\forall i$) die Rekursionen

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} B_{n-i}$$

also mit $B_0 = B_1 = 1$:

$$B_2 = \binom{1}{0} B_1 + \binom{1}{1} B_0 = 2$$

$$B_3 = \binom{2}{0} B_2 + \binom{2}{1} B_1 + \binom{2}{2} B_0 = 2 + 2 + 1 = 5$$

<u>12.10. Satz:</u> Sei d_n die Anzahl der zushgden einfachen Graphen mit n Ecken. Dann gilt

$$d_n = 2^{\binom{n}{2}} - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} 2^{\binom{n-i}{2}} d_i$$

<u>Beweis:</u> Einfacher Graph auf $1, \dots, n$

$\hat{=}$ Partition von $[n]$ und einfache zushgde Graphen für jeden Block von Partition

Somit sind wir in der Situation (*) mit

$f(n) = d_n$ # zushgde Graphen

$f * \zeta(n) = \binom{n}{2}$ # aller Graphen

Rekursion ergibt sich dann aus Rekursion von 12.9. (4) $\square$