13. Polya - Abzählung

13.1. Motivation:

<u>(n, r) - Halsketten</u> (engl. „necklaces")

= Äquivalenzklassen von Färbungen des zyklischen Graphen C_n mit r Farben unter <u>Rotation</u>

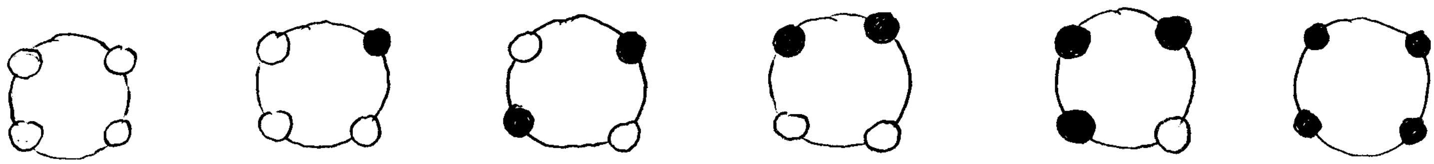
⌢ und

<u>(n, r) - Armketten</u> (engl. „bracelets")

= Äquivalenzklassen von Färbungen des zyklischen Graphen C_n mit r Farben unter <u>Rotation</u> und <u>Spiegelung</u>

⌢ FRAGE: Gegeben n, r. Wieviele (n, r) - Halsketten und wieviele (n, r) - Armketten gibt es dann?

<u>Beispiel</u>: $n = 4$, $r = 2$



Es gibt 6 $(4, 2)$ - Halsketten und 6 $(4, 2)$ - Armketten.

Diese und ähnliche Fragen können wir mit der Polya Theorie behandeln.

<u>13.2. Def.:</u> Die endliche Gruppe G operiere von links auf der endlichen Menge X mit $|X| = n$. Für $g \in G$ sei

$$\underline{c}(g) = (c_1(g), \dots, c_n(g))$$

der <u>Zykeltyp</u> von g auf X, d.h. für $i = 1, \dots, n$

$$c_i(g) := \left| \{ \langle g \rangle x \in \langle g \rangle \backslash X \mid |\langle g \rangle x| = i \} \right|.$$

Wir betrachten den Polynomring $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$.
Das Polynom

$$Z_{G,X}(X_1, \dots, X_n) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} X_1^{c_1(g)} X_2^{c_2(g)} \cdots X_n^{c_n(g)}$$

heißt der <u>Zykelzeiger von G auf X</u>.

Wir erinnern uns:

- Eine <u>Operation von G auf X</u> ist eine Abbildung $G \times X \to X$ mit (i) $\forall x \in X: 1_G x = x$
  (ii) $\forall x \in X \ \forall g, h \in G: (gh)x = g(hx)$
- $Gx := \{ gx \mid g \in G \} \subseteq X$ heißt <u>Bahn von x unter G</u>.
- $G \backslash X := \{ Gx \mid x \in X \}$

13.3. Beispiele:

(a) Die symmetrische Gruppe S_n operiert kanonisch auf $[n] = \{1, \dots, n\}$. In Zykelschreibweise gilt

z.B. $S_3 = \{(1)(2)(3), (1\,2)(3), (1\,3)(2), (2\,3)(1),$
$(1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$.

$$\Rightarrow Z_{S_3,[3]}(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{6}\left(X_1^3 + 3X_1X_2 + 2X_3\right)$$

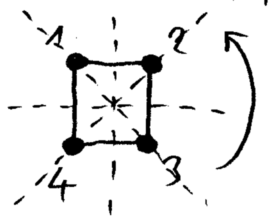
(b) Mit S_n operiert auch jede Untergruppe von S_n auf $[n]$.

$G = \langle (1\,2\,3\,4) \rangle \quad (\cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$
$= \{(1\,2\,3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3\,2), (1)(2)(3)(4)\}$

$$\Rightarrow Z_{G,[4]}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{1}{4}\left(X_1^4 + X_2^2 + 2X_4\right)$$

(c) Die Diedergruppe $D_n := \mathrm{Aut}(C_n) \subset S_n$ gilt

$D_4 = \{(1)(2)(3)(4), (1\,2\,3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3\,2),$
$(1\,2)(3\,4), (1\,4)(2\,3), (1)(3)(2\,4), (2)(4)(1\,3)\}$

denn 

.

$$\Rightarrow Z_{D_4,[4]}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{1}{8}\left(X_1^4 + 2X_1^2X_2 + 3X_2^2 + 2X_4\right)$$

Beachte: Allgemein gilt $|D_n| = 2n$.

13.4. Bemerkung:

(a) Ordnen wir X_i den Grad i zu, dann hat jedes Monom von $Z_{G,X}$ Grad n, denn

$$\sum_{i=1}^{n} i\, c_i(g) = n \qquad \forall g \in G.$$

(b) Ist Y eine endliche Menge mit $|Y| = r$, dann operiert G auch auf

$$\mathrm{Abb}(X, Y) := \{ F : X \longrightarrow Y \}$$

durch $(gF)(x) := F(g^{-1}x)$. Beachte, dass

$$\begin{aligned} ((gh)F)(x) &= F((gh)^{-1}x) \\ &= F(h^{-1}(g^{-1}x)) \\ &= (g(hF))(x) \end{aligned}$$

Nun können wir den zentralen Satz dieses Kapitels formulieren:

13.5. Satz (Polya, 1937):

Die endliche Gruppe G operiere von links auf der endlichen Menge X mit $|X| = n$. Weiter sei Y eine endliche Menge $Y = \{y_1, \dots, y_r\}$. Wir setzen $\mathcal{F} := \mathrm{Abb}(X, Y)$ und für $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}_0^r$ mit $w(\underline{a}) := \sum_{j=1}^{r} a_j = n$ definieren wir

$$\mathcal{F}(\underline{a}) := \{ F \in \mathcal{F} \mid \forall j = 1, \dots, r : \ |F^{-1}(\{y_j\})| = a_j \}.$$

Damit gilt $\mathcal{F} = \dot{\bigcup}_{w(\underline{a})=n} \mathcal{F}(\underline{a})$, wobei jedes $\mathcal{F}(\underline{a})$ stabil unter der Operation von G ist, d.h. $\mathcal{F}(\underline{a})$ ist disjunkte Vereinigung von Bahnen von G auf $\mathcal{F}$.

Im Polynomring $\mathbb{Q}[Y_1, \dots, Y_r]$ gilt dann

$$\frown Z_{G,X}\left(\sum_{j=1}^r Y_j, \sum_{j=1}^r Y_j^2, \dots, \sum_{j=1}^r Y_j^n \right)$$

$$= \sum_{\substack{\underline{a} \in \mathbb{N}_0^r \\ w(\underline{a})=n}} |G \backslash \mathcal{F}(\underline{a})| \, Y_1^{a_1} Y_2^{a_2} \cdots Y_r^{a_r} .$$

<u>Beispiel:</u> $Y = \{s, w\}$, d.h. $r = 2$, $X = [4]$, d.h. $n = 4$

• $\frown Z_{D_4,[4]}(Y_1 + Y_2, Y_1^2 + Y_2^2, Y_1^3 + Y_2^3, Y_1^4 + Y_2^4)$

$$\overset{13.3(c)}{=} \frac{1}{8}\Big((Y_1 + Y_2)^4 + 2(Y_1 + Y_2)^2 (Y_1^2 + Y_2^2) + 3(Y_1^2 + Y_2^2)^2 + 2(Y_1^4 + Y_2^4) \Big)$$

$$= \dots$$

$$= Y_1^4 + Y_1^3 Y_2 + 2 Y_1^2 Y_2^2 + Y_1 Y_2^3 + Y_2^4$$

$\Longrightarrow$ Es gibt 6 $(4,2)$ – Armbetten.

- $Z_{\langle(1234)\rangle,[4]}(Y_1+Y_2,\, Y_1^2+Y_2^2,\, Y_1^3+Y_2^3,\, Y_1^4+Y_2^4)$

$$\overset{13.3(e)}{=} \frac{1}{4}\left((Y_1+Y_2)^4 + (Y_1^2+Y_2^2)^2 + 2(Y_1^4+Y_2^4)\right)$$

$$= \dots$$

$$= Y_1^4 + Y_1^3 Y_2 + 2Y_1^2Y_2^2 + Y_1Y_2^3 + Y_2^4$$

$\Rightarrow$ Es gibt 6 (4,2)-Halsketten

Der Beweis des Satzes von Polya beruht wesentlich auf dem Burnside-Lemma:

<u>13.6. Satz</u> (Burnside-Lemma):

Die endliche Gruppe G operiere von links auf der endlichen Menge $\underline{X}$. Dann gilt

$$|G\backslash \underline{X}| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}_{\underline{X}}(g)|$$

wobei $\mathrm{Fix}_{\underline{X}}(g)$ die Menge der <u>Fixpunkte</u> von $g\in G$ bezeichnet, d. h.

$$\mathrm{Fix}_{\underline{X}}(g) := \{x\in \underline{X} \mid gx = x\}.$$

<u>Beweis</u>: Nach dem Satz von Lagrange gilt

$$(*) \quad |G| = |\mathrm{Stab}_G(x)| \cdot |Gx|, \quad (\forall x\in\underline{X})$$

wobei $\mathrm{Stab}_G(x) := \{g\in G \mid gx = x\}$.

Betrachte nun $S := \{(g,x) \in G \times X \mid gx = x\}$.

Methode der doppelten Abzählung:

$$|S| = \sum_{g \in G} |Fix_X(g)| \text{ und andererseits}$$

$$|S| = \sum_{x \in X} |Stab_G(x)|$$

$$\overset{(*)}{=} |G| \cdot \underbrace{\sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}} = |G| \cdot |G \backslash X|$$

$$= \sum_{Gx \in G\backslash X} \underbrace{\sum_{y \in Gx} \underbrace{\frac{1}{|Gy|}}_{= \frac{1}{|Gx|}}}_{=1} = |G \backslash X|$$

$$X = \dot{\bigcup_{Gx \in G\backslash X}} Gx$$

□

<u>13.7. Satz:</u> In der Situation von Satz 13.5 ist die Zahl der Bahnen von G auf $Abb(X, Y)$ gegeben durch

$$Z_{G,X}(r, \dots, r) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} r^{c_1(g) + \dots + c_n(g)}.$$

<u>Beweis:</u> Nach dem Lemma von Burnside ist

$$|G \backslash Abb(X,Y)| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |Fix_{Abb(X,Y)}(g)|$$

Für $\mathcal{F} \in \mathrm{Abb}(X, Y)$ gilt nun:

$$\mathcal{F} \in \mathrm{Fix}_{\mathrm{Abb}(X,Y)}(g)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}(g^{-1}x) = \mathcal{F}(x) \qquad \forall x \in X$$

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ ist konstant auf jeder Bahn $\langle g \rangle x \in \langle g \rangle \backslash X$

Hat g den Zykeltyp $\underline{c}(g) = (c_1(g), \ldots, c_n(g))$, dann gibt es genau $c_1(g) + \ldots + c_n(g)$ viele Bahnen. Also:

$$|\mathrm{Fix}_{\mathrm{Abb}(X,Y)}(g)| = r^{|\langle g \rangle \backslash X|}$$
$$= r^{c_1(g) + \ldots + c_n(g)}$$

$$\Rightarrow |G \backslash \mathrm{Abb}(X, Y)| = Z_{G,X}(r, \ldots, r)$$

$\square$

Die Gesamtzahl aller Bahnen von G auf $\mathrm{Abb}(X, Y) = \mathcal{F}$ lässt sich also noch ohne den Satz von Polya bestimmen. Dieser erlaubt allerdings zusätzlich, die Anzahl der Bahnen in jedem $\mathcal{F}(\underline{a})$ zu bestimmen!

<u>Beispiel</u>:
- $Z_{D_4, [4]}(2,2,2,2) = 6$
- $Z_{\langle(1234)\rangle, [4]}(2,2,2,2) = 6$

Beweis von Satz 13.5.:

$$Z_{G,\underline{X}}\left(\sum_{j=1}^{r} y_j, \ldots, \sum_{j=1}^{r} y_j^n\right)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r} y_j^i\right)^{c_i(g)}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{\substack{\underline{a}\in \mathbb{N}_0^r \\ \wedge\ w(\underline{a})=n}} \phi(\underline{a})\, y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_r^{a_r}$$

mit irgendwelchen Koeffizienten $\phi(\underline{a})$. Diese Darstellung ist möglich, da nach Bem. 13.4 (a)

$$\sum_{i=1}^{n} i\, c_i(g) = n.$$

Für $g \in G$ gilt nun

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r} y_j^i\right)^{c_i(g)} = \prod_{C\in\langle g\rangle\backslash \underline{X}} \left(\sum_{j=1}^{r} y_j^{|C|}\right)$$

$$= \sum_{\alpha:\langle g\rangle\backslash\underline{X}\to[r]} \ \prod_{C\in\langle g\rangle\backslash\underline{X}} y_{\alpha(C)}^{|C|}$$

$$= \sum_{\alpha:\langle g\rangle\backslash\underline{X}\to[r]} \ \prod_{j=1}^{r} y_j^{\left(\underbrace{\sum_{C\in\alpha^{-1}(\{j\})}|C|}_{a_j}\right)}$$

und damit für $\underline{a}\in\mathbb{N}_0^r$ mit $w(\underline{a})=n$:

$$\phi(\underline{a}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \underbrace{\left[\sum_{\substack{\alpha : \langle g\rangle\backslash X \to [r]: \\ \forall j : \sum\limits_{C\in\alpha^{-1}(\{j\})} |C| = a_j}} 1 \right]}_{= |\mathrm{Fix}_{\mathcal{F}(\underline{a})}(g)| \qquad (*)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}_{\mathcal{F}(\underline{a})}(g)|$$

$$= |G \backslash \mathcal{F}(\underline{a})|$$ nach dem Burnside-Lemma (Satz 13.6)

<u>zu (*):</u> Für $F : X \to Y$ gilt

$F \in \mathrm{Fix}_{\mathcal{F}(\underline{a})}(g)$

$\Longleftrightarrow$ ① $\forall j = 1, \dots, r : \; |F^{-1}(\{y_j\})| = a_j$

② $F(g^{-1}x) = F(x) \quad \forall x \in X$

$\Longleftrightarrow$ ① $\forall j = 1, \dots, r : \; |F^{-1}(\{y_j\})| = a_j$

② F ist konstant auf jedem $C \in \langle g\rangle\backslash X$

Damit:

$$\left\{ \alpha : \langle g\rangle\backslash X \to [r] \;\middle|\; \forall j : \sum_{C\in\alpha^{-1}(\{j\})} |C| = a_j \right\} \xrightarrow{1:1} \mathrm{Fix}_{\mathcal{F}(\underline{a})}(g)$$

$$\alpha \longmapsto F_\alpha \text{ mit } F_\alpha|_C \equiv y_j \quad \forall C \in \alpha^{-1}(\{j\}) \qquad \square$$

13.8 Beispiel:

In S_n betrachten wir $\sigma = (1\,2 \cdots n)$. Dann ist

$$Z_{\langle\sigma\rangle,[n]}(X_1,\dots,X_n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d)\,X_d^{n/d},$$

wobei ϕ die Eulersche Funktion bezeichnet, d.h.

$$\phi(d) := \left|\{1 \le k \le d \mid \mathrm{ggT}(d,k) = 1\}\right|.$$

(vgl. Beispiel 13.3 (b))

Die Anzahl der (n,r)-Halsketten mit genau a_j Perlen der Farbe y_j, $j = 1,\dots,r$ ist somit gegeben als Koeffizient vor

$$y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r}$$

in

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d)\,(y_1^d + \dots + y_r^d)^{n/d}.$$

Eine ähnliche Aussage lässt sich auch für (n,r)-Armketten treffen, denn es gilt

$$Z_{D_n,[n]}(X_1,\dots,X_n) = \frac{1}{2}\left(Z_{\langle\sigma\rangle,[n]}(X_1,\dots,X_n) + X_1^2 X_2^{\frac{n-1}{2}}\right),$$

falls n ungerade ist, und

$$Z_{D_n,[n]}(X_1,\dots,X_n) = \frac{1}{2}Z_{\langle\sigma\rangle,[n]}(X_1,\dots,X_n) + \frac{1}{4}\left(X_2^{\frac{n}{2}} + X_1^2 X_2^{\frac{n-2}{2}}\right),$$

falls n gerade ist.

13.9. Beispiel:

Mit der Polya-Theorie können wir auch Isomorphieklassen von Graphen abzählen!

Ein einfacher Graph auf der Knotenmenge V ist bestimmt durch die Kantenmenge

$$E \subset \mathcal{P}_2(V) = \{2\text{-elementige Teilmengen von } V\}$$

oder äquivalent durch

$$\chi_E \in \mathrm{Abb}(\mathcal{P}_2(V), \{0,1\}),$$

d.h. die charakteristische Funktion zu E.

S_k mit $k := |V|$ operiert auf $\mathcal{P}_2(V)$ durch

$$\sigma(\{v_i, v_j\}) := \{v_{\sigma(i)}, v_{\sigma(j)}\}. \quad (V = \{v_1, \dots, v_k\})$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} (V,E) \cong (V,E') &\iff \exists\, \sigma \in S_k : \sigma(E) = E' \\ &\iff \exists\, \sigma \in S_k : \sigma \chi_E = \chi_{E'} \end{aligned}$$

Um also die Anzahl der Isomorphieklassen

$$S_k \backslash \mathrm{Abb}(\mathcal{P}_2(V), \{0,1\})$$

bestimmen zu können, brauchen wir

$$Z_{S_k, \mathcal{P}_2(V)}(X_1, \dots, X_n) \quad \text{mit} \quad n := \binom{k}{2} = |\mathcal{P}_2(V)|.$$

<u>Beispiel</u>: $k = |V| = 3$, o. B. d. A $V = \{1,2,3\}$

$$\mathcal{P}_2(\{1,2,3\}) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

$$S_3 = \{(1)(2)(3), (1\,2)(3), (1\,3)(2), (2\,3)(1), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$$

3 Bahnen der Länge 1

- 1 Bahn der Länge 1
- 1 Bahn der Länge 2

1 Bahn der Länge 3

etwa $(1\,2\,3)$: $\{1,2\} \longmapsto \{2,3\} \longmapsto \{1,3\} \longmapsto \{1,2\}$

Damit:

$$Z_{S_3, \mathcal{P}_2(V)}(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{6}\left(X_1^3 + 3X_1X_2 + 2X_3\right)$$

Nach dem Satz von Polya:

$$Z_{S_3, \mathcal{P}_2(V)}(Y_1 + Y_2, Y_1^2 + Y_2^2, Y_1^3 + Y_2^3)$$
$$= \dots = Y_1^3 + Y_1^2 Y_2 + Y_1 Y_2^2 + Y_2^3$$

Die Zykelzeiger lassen sich allgemein angeben, dies gibt allerdings keine „schöne" Formel.

Zur Übung:

$$Z_{S_4, \mathcal{P}_2([4])}(X_1, \dots, X_6) = \frac{1}{24}\left(X_1^6 + 9X_1^2X_2^2 + 8X_3^2 + 6X_2X_4\right)$$