14. q-Numerologie und "Cyclic Sieving" Phänomen

14.1. Notationen: Für $q \in \mathbb{C}$ (oder betrachte q als formale Variable) betrachten wir die folgenden q-Analoga:

$$[n]_q := 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$= \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$[n]_q! := [1]_q \cdot [2]_q \cdots [n]_q \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\binom{n}{k}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} \qquad (0 \le k \le n)$$

14.2. Bemerkungen: 1) Für $q \to 1$ konvergieren diese gegen die entsprechenden klassischen Varianten:

$$[n]_q \xrightarrow{q \to 1} n$$

$$[n]_q! \xrightarrow{q \to 1} n!$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \xrightarrow{q \to 1} \binom{n}{k}$$

2) Diese q-Varianten tauchen in vielen q-Deformationen von klassischen Aussagen auf.

Beispiel: Betrachte Variable x, y welche q-vertauschen: $yx = q\,xy$.

Dann ist

$$(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$$
$$= x^2 + (1+q)\,xy + y^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q xy + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_q y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + \underbrace{\underbrace{xyy + yxy + yyx}_{xyy\,(1+q+q^2)}}_{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q} + \underbrace{\underbrace{xxy + xyx + yxx}_{xxy\,(1+q+q^2)}}_{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_q}$$

__14.3 Satz:__ Betrachte x, y mit $yx = q\,xy$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k}$$

<u>Beweis:</u> durch Induktion über n

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\,(x+y)^n$$

$$= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} y^{(n+1)-(k+1)} \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{k+1} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_q \right\}}_{\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q} + x^{n+1} + y^{n+1}$$

□

<u>14.4. Beispiele:</u> 1) Sei $\mathbb{F}_q$ endlicher Körper mit q Elementen (dann $q = p^k$, p Primzahl)

Dann gilt

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \#\ k\text{-dim Teilräume im } n\text{-dim. Vektorraum } \mathbb{F}_q^n$$

Insbesondere: $\#$ 1-dim TR in $\mathbb{F}_q^n$ =

$$= \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q = [n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Dies gilt da: $\exists\ q^n - 1$ von 0 verschiedene Vektoren in $\mathbb{F}_q^n$

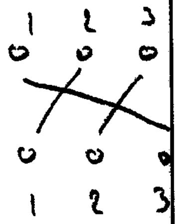
Für jeden solchen Vektor gilt es $q-1$ Vielfache, die gleichen TR erzeugen.

2) Für eine Permutation $\pi \in S_n$ sei

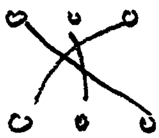
$$\mathrm{inv}(\pi) = \#\{(i,j) \mid i<j,\ \pi(i) > \pi(j)\}$$

Anzahl der Inversionen

Bildlich: $\mathrm{inv}(\pi)$ = Anzahl der Kreuzungen



$\mathrm{inv} = 2$



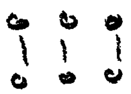
$\mathrm{inv} = 3$

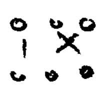
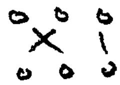
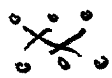
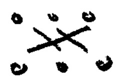
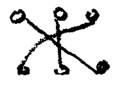
Dann gilt

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = [n]_q!$$

z. B. $n = 3$

$$\Rightarrow \sum_{\pi \in S_3} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = [3]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \cdot [3]_q$$
$$= (1+q)(1+q+q^2)$$
$$= 1 + 2q + 2q^2 + q^3$$

↳ 1 π mit 0 Inversionen 

2	1	 
2	2	 
1	3	

<u>14.4. Definition</u>: Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung n, erzeugt von einem Element c. G wirke auf einer endlichen Menge X. Weiterhin sei $P(q)$ ein Polynomial mit ganzzahligen Koeffizienten in einer Variable q. Wir sagen "(X, G, P) zeigt das <u>cyclic sieving Phänomen</u>", falls gilt

$$|\mathrm{Fix}_X(c^d)| = P(e^{\frac{2\pi i d}{n}})$$

$\uparrow$ n-ten Einheitswurzeln

Dies ist äquivalent dazu, dass

$$P(q) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j q^j \mod q^n - 1$$

mit

$a_j = \#$ G-Orbits, deren Stabilizer-Ordnung j teilt

<u>14.5. Bem</u>: 1) Es gibt immer solche Polynome $P(q)$; das Erstaunliche ist, dass diese in vielen Fällen "natürliche" q-Deformationen von Zählproblemen in X sind.

2) Geschichte:

frühe 1990's: "(−1)-Phänomen"
John Stembridge

2004: "The cyclic sieving phenomenon"
Vic Reiner, Dennis Stanton, Dennis White

Seitdem wurden viele Beispiele dafür entdeckt.

14.6. Beispiel: Sei $X = \{k\text{-elementige Teilmengen von } [n]\}$

$c: i \to i+1 \pmod n$ Wirkung auf Teilmengen

Dies genügt cyclic sieving mit

$$P(q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

Sei $n = 4$, $k = 2$, d.h.

$$X = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

Dann wirkt c gemäß

Ordng 1

$$\begin{tikzcd} & \{1,2\} \arrow[dr, "c"] & \\ \{1,4\} \arrow[ur, "c"] & & \{2,3\} \arrow[dl, "c"] \\ & \{3,4\} \arrow[ul, "c"] & \end{tikzcd}$$

Ordng 2

$$\begin{tikzcd} \{1,3\} \arrow[r, bend left, "c"] & \{2,4\} \arrow[l, bend left, "c"] \end{tikzcd}$$

und

$$P(q) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{[4]_q \cdot [3]_q}{[1]_q \cdot [2]_q} = \frac{(1-q^4)(1-q^3)}{(1-q)(1-q^2)}$$

$$= (1+q^2)(1+q+q^2)$$

$$= 1+q+2q^2+q^3+q^4$$

$$\Rightarrow P(1) = 6 = \mathrm{Fix}_X(c^0) = |X|$$

$$P(i) = 0 = \mathrm{Fix}_X(c)$$

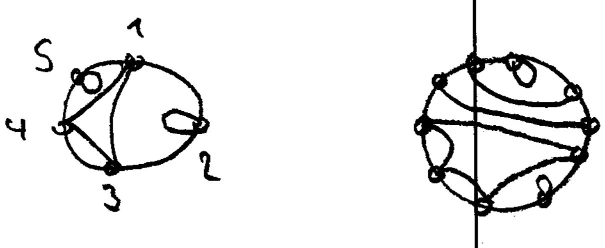
$$P(-1) = 2 = \mathrm{Fix}_X(c^2)$$

$$P(-i) = 0 = \mathrm{Fix}_X(c^3)$$

Es gilt

$$P(q) = \underset{\substack{\text{zählt die}\\ \text{beiden}\\ \text{Orbits}}}{2} + \underset{\substack{\text{1 Orbit}\\ \text{mit Ordnung 1}}}{q} + 2q^2 + q^3 \qquad \mod q^4 - 1$$

<u>14.7. Beispiel:</u> Sei $X = NC(n)$ die Menge der nicht-kreuzenden Partitionen von $[n]$. Wenn man sie auf dem Kreis darstellt



ist klar, dass $NC(n)$ unter Rotationen invariant ist.

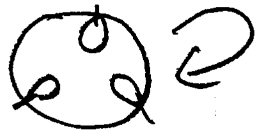
Es gilt: $\# NC(n) = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Wir betrachten die q-Version von den Catalan-Zahlen

$$P(q) = \frac{1}{[n+1]_q} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q$$

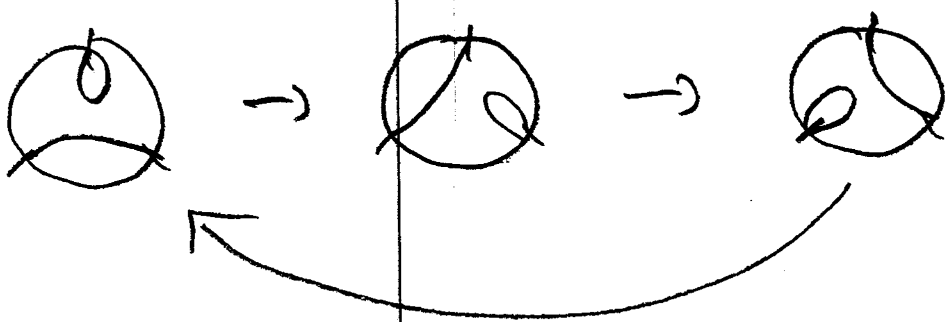
Dann gilt: $(NC(n), \text{Rotation}, P(q))$
genügt cyclic sieving (Reiner, Stanton, White 2004)

z.B. $n = 3$



Orbit der Länge 1

Orbit der Länge 1



Orbit der Länge 3

$$P(q) = \frac{1}{[4]_q} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}_q$$

$$= \frac{[6]_q [5]_q}{[2]_q [3]_q}$$

$$= \frac{(1-q^6)(1-q^5)}{(1-q^2)(1-q^3)} = \frac{(1+q^3)(1-q^5)}{(1-q)(1+q)}$$

$$= (1-q+q^2)(1+q+q^2+q^3+q^4)$$

$$\vdots$$

$$= 1+q^2+q^3+q^4+q^6$$

ω = 3-te Einheitswurzel

Somit:

$P(1) = 5 = \# N(C3)$

$P(\omega) = 2 = \# \mathrm{Fix}(c)$

$P(\omega^2) = 2 = \# \mathrm{Fix}(c^2)$

und

$P(q) = 3 + q + q^2$ mod $q^3 - 1$

Anzahl der Orbits