15. Partitionen und RSK-Algorithmus

15.1. Def.: Sei $N \in \mathbb{N}$. Eine Partition von N ist eine Zerlegung von N in eine Summe von natürlichen Zahlen, ohne Beachtung der Ordnung. Die Menge der Partitionen von N bezeichnen wir mit $Y(N)$.
Die Anzahl der Terme in einer Partition λ bezeichnen wir mit $\ell(\lambda)$.
Man schreibt auch $\lambda \vdash N$ für $\lambda \in Y(N)$

15.2. Beispiel: Für $N = 5$ hat man folgende Partitionen

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4+1 \\
&= 3+2 \\
&= 3+1+1 \\
&= 2+2+1 \\
&= 2+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

15.3. Notation: Die Partitionsfunktion

$p(N) := |Y(N)|$

zählt die Anzahl der Partitionen von N.

<u>15.4. Beispiel:</u> Für $N = 5$ haben wir $p(5) = 7$.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(N)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30

<u>15.5. Bem.:</u> 1) Es gilt keine geschlossene Formel für $p(N)$.

2) Eulers erzeugende Fkt

$$\sum_{N \geq 0} p(N)\, x^N = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x^i}$$

3) Ramanujan Kongruenzen

$$p(5k+4) \equiv 0 \mod 5$$
$$p(7k+5) \equiv 0 \mod 7$$
$$p(11k+6) \equiv 0 \mod 11$$

Ramanujan ~ 1921

Ono 2000

4) Asymptotisches Verhalten

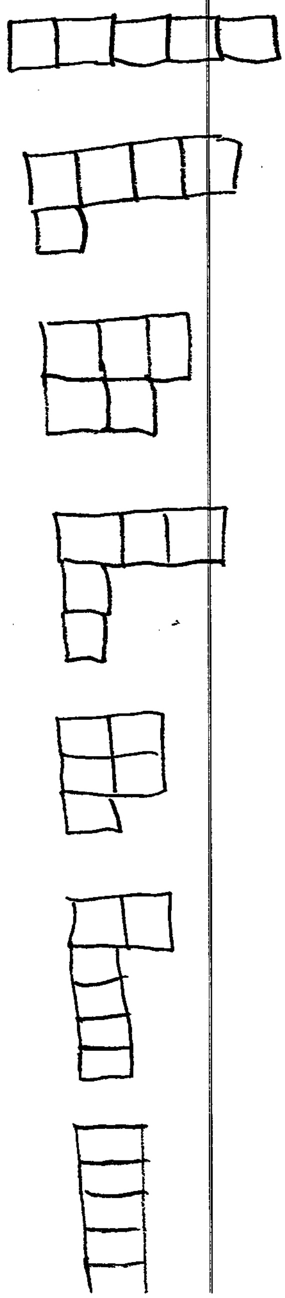
$$p(N) \sim \frac{e^{\pi \sqrt{\frac{2N}{3}}}}{\sqrt{48}\, N} \quad \text{für } N \to \infty$$

Hardy + Ramanujan ~ 1918

15.6. Def: Für eine partition $\lambda \in Y(N)$, $N = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$ ist das zugehörige Young Diagramm $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ ein Feld von Einheitsquadraten "Zellen", oben-linksbündig,
mit λ_1 Zellen in der ersten Reihe
λ_2 — " — zweiten "
etc

15.7. Beispiel: $N = 5$

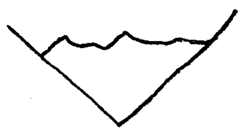
$Y(5) =$



Dies ist die  "englische" Notation.

"Französisch" ist

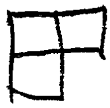
Es gibt auch noch die "russische"



15.7. Bem: $\lambda \in Y(N)$ entsprechen den Konjugationsklassen von S_N $\hat{=}$ irreduziblen Darst. von S_N

z.B. $N = 3$

$\{(1)(2)(3)\}$ $\longleftrightarrow$ 

$\{(12)(3), (13)(2), (23)(1)\}$ $\longleftrightarrow$ 

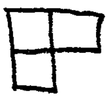
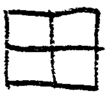
$\{(123), (132)\}$ $\longleftrightarrow$ 

15.8. Def: Betrachte

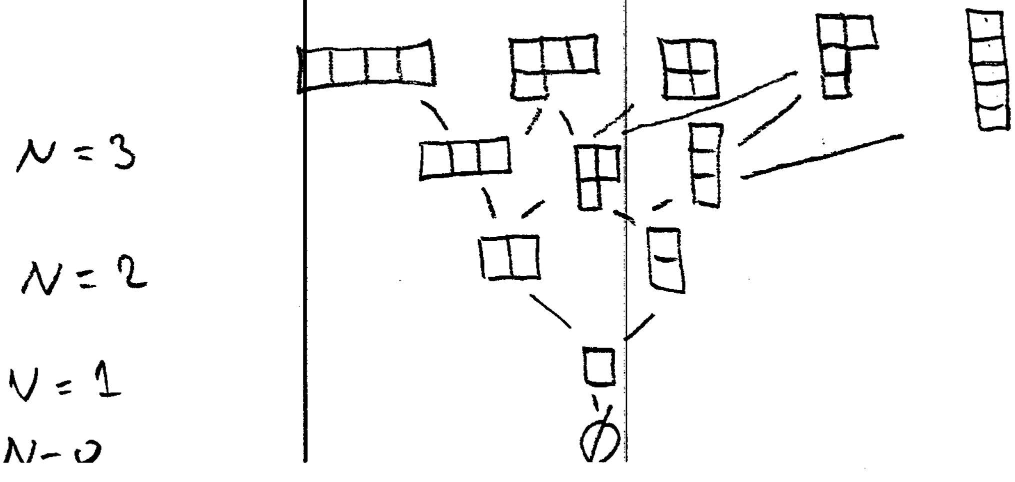
$$Y = \bigcup_{N \geq 0} Y(N)$$

Betrachte dat die partielle Ordnung

$\mu \subseteq \lambda \iff \mu$ ist als Diagramm in λ enthalte

z.B.  $\subseteq$ 

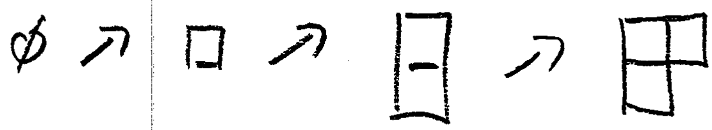
$\rightarrow$ Y ist ein Verband



15.9. Def: Sei $\lambda \in Y(N)$ gegeben. Ein <u>Young-Tableau</u> der Gestalt λ ist ein Weg $\emptyset \to \lambda$ in Y, bei dem in jedem Schritt eine Zelle hinzugefügt wird.

$Tab(\lambda) = \{$ Young-Tableaus der Gestalt $\lambda \}$

Ein Tableau wird meist dadurch gegeben, dass im Diagramm λ die im i-ten Schritt hinzugefügte Zelle mit i bezeichnet wird.

15.10. Bsp: 

entspricht $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$

$Tab\left(\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \right\}$

15.11. Bem: 1) Aus Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe folgt:

Dim. der irr. Darstellung $\lambda = |Tab(\lambda)|$

2) Allgemein gilt für irr. Darstellungen endl. Gruppen

$$\sum_{\lambda \in Y(N)} (\dim \lambda)^2 = |S_N| = N!$$

3) Dies suggeriert die Existenz einer Bijektion

$$S_N \longleftrightarrow \bigcup_{\lambda\in Y(N)} \mathrm{Tab}(\lambda)\times \mathrm{Tab}(\lambda)$$

Eine solche Bijektion wird durch den RSK-Algorithmus gegeben

Robinson - Schensted - Knuth
1938 1961 1973

<u>15.12 Beispiel</u>: Sei $\sigma \in S_8$ gegeben durch

$\sigma = (186)(457)$ bzw

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 3 & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 \end{matrix}$$

Wir erzeugen nun $S, T \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ für ein $\lambda \in Y(8)$

S wird sukzessive erzeugt:

$$\begin{array}{|c|}\hline 8\\\hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2&3&5&7\\\hline 8\\\cline{1-1}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&5&7\\\hline 2\\\cline{1-1} 8\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$\to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&4&7\\\hline 2&5\\\cline{1-2} 8\\\cline{1-1}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&4&6\\\hline 2&5&7\\\cline{1-3} 8\\\cline{1-1}\end{array} = S$$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&4&5\\\hline 2&7&8\\\cline{1-3}\end{array}$$ ← Entstehungsgeschichte der Boxen

15.13 Bem.: 1) $(S,T) \in \mathrm{Tab}(\lambda)$ enthalten interessante Information über σ, insbesondere

Anzahl der Spalten von λ = Länge der längsten aufsteigenden Teilfolge von σ

Anzahl der Zeilen von λ = — " — absteigenden — " —

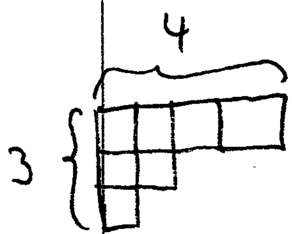
In unserem Bsp:

längste aufst. TF : 8 2 3 5 7 1 4 6

Länge 4

längste abst. TF : 8 2 3 5 7 1 4 6

Länge 3



2) Dies liefert dann z.B. einen anderen, direkten, Beweis von Erdös-Szekeres:

Jede Permutation von $1, 2, \ldots, (p-1)(q-1)+1$ enthält eine absteigende TF der Länge p oder aufsteigende q

Beweis: Sei $\sigma \in S_N$, mit $N := (p-1)(q-1)+1$ eine Permutation ohne abst. TF der Länge p und ohne aufst. TF der Länge q

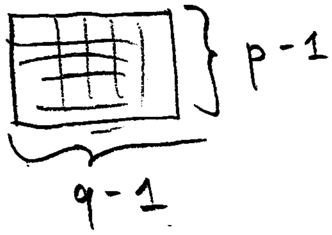
Gemäß RSK entspricht

$\sigma \leftrightarrow (S, T)$ mit $S, T \in \mathrm{Tab}(\lambda)$

$\lambda \in Y(N)$

$\Rightarrow \lambda$ hat $\leq (p-1)$ Zeilen

$\leq (q-1)$ Spalten

$\Rightarrow \lambda \subset$ 

$\Rightarrow \ell(\lambda) \leq (p-1)(q-1) < N$

Wdsp zu $\lambda \in Y(N)$ ↯