Ramanujangraphen von jedem Grad

(nach: Marcus, Spielman, Srivastava)

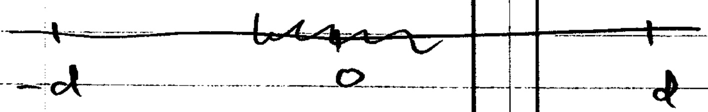
G Graph einfach, d-regulär $\to$ $A(G)$ Nachbarschaftsmatrix

Eigenwerte: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$

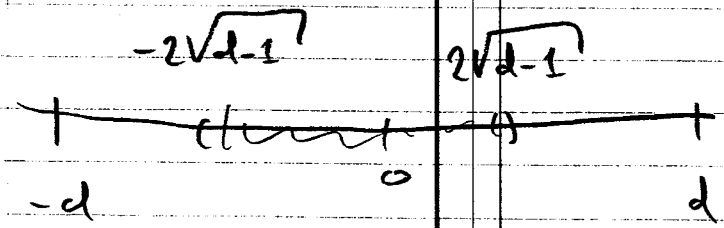
G regulär $\Rightarrow$ $\lambda_1 = d$ trivial

G bipartit $\Rightarrow$ $\lambda_n = -d$ trivial

G ist guter spektraler Expander, falls nicht-triviale EW klein



Ziel: unendliche Familien $(n \to \infty)$ mit d fest



Alon-Boppana 86: besser als $2\sqrt{d-1}$ geht nicht!

Ramanujan-Graph: erreichen diese Schranke, d.h. alle nicht-trivialen $|EW| \leq 2\sqrt{d-1}$

Margulis; Lubotzky + Phillips + Sarnak (1988): $\exists$ unendl. Familien von Ram. Graphen für $d =$ Primzahl $+ 1$

Friedman 2008: Ein zufälliger d-regulärer Graph ist fast Ramanujan:
$\leq 2\sqrt{d-1} + \varepsilon$

Satz (MSS 2015): $\exists$ unendl. Familien von bipartiten Ram.graphen für jeden Grad.
Sogar: $\exists$ Ram-graphen für Grad d für jede Anzahl n von Vertizes

genauer:

Seien $P_1 \dots P_d$ unabh. glm. verteilte zufällige $n \times n$ Permutationsmatrizen, $d \geq 3$.
Dann sind die nicht-trivialen EW von

$$A = \sum_{i=1}^{d} \begin{bmatrix} 0 & P_i \\ P_i^T & 0 \end{bmatrix}$$

mit nicht-verschwindender Wkeit betragsmäßig
$\leq 2\sqrt{d-1}$.

Idee: Verstehe EW von $A + PBP^T$
für zufällige P
durch EW von A und B

Codiere EW in charakt. Polynom

$\chi_x(A) := \det(x\mathbb{1} - A)$

Definiere dann

$$(p \boxplus_n q)(x) = E_Q \chi_x(A + QBQ^T)$$

zufällig orthogonale Matrix

gemittelt über alle Q

Untersuche diese "endliche freie Faltung"

Zeige:

- in unserer Situation (von [illegible] Complex) hängt Mittelung über P mit Mittelung über Q zusammen
- $\exists$ Realisierungen, deren ~~EW mit dem~~ charakt. Polynom mit dem gemittelten charakt. Polynom verglichen werden kann

beachte: dies ist nicht trivial, im Allgemeinen haben EW von gemittelten char. Polynom nichts mit EW der char. Polynome zu tun

Bsp: $\frac{1}{2}[(x-1)(x-2)] + \frac{1}{2}[(x-3)(x-4)]$

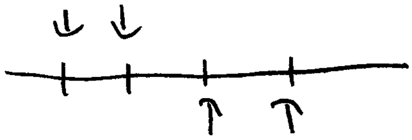
$= x^2 - 5x + 7$

EW: $1, 2$

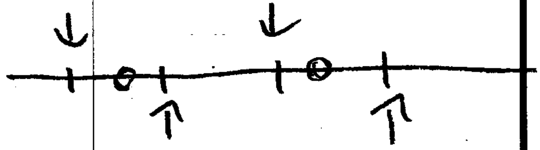
EW: $3, 4$

EW: $\frac{5}{2} \pm \sqrt{3}\, i$

insb. nicht reell !



Allerdings ist in unserer Situation das Gen lesen $\rightsquigarrow$ verschränkte Würfeln $\to$ bessere Kontrolle
$\to$ insbes. reell



$$\frac{1}{2}\Big(\underbrace{[(x-1)(x-3)]}_{\text{EW: } 1,3} + \frac{1}{2}\underbrace{[(x-2)(x-4)]}_{\text{EW: } 2,4}\Big)$$

$$= x^2 - 5x + 11$$

$\hookrightarrow$ EW: $\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$