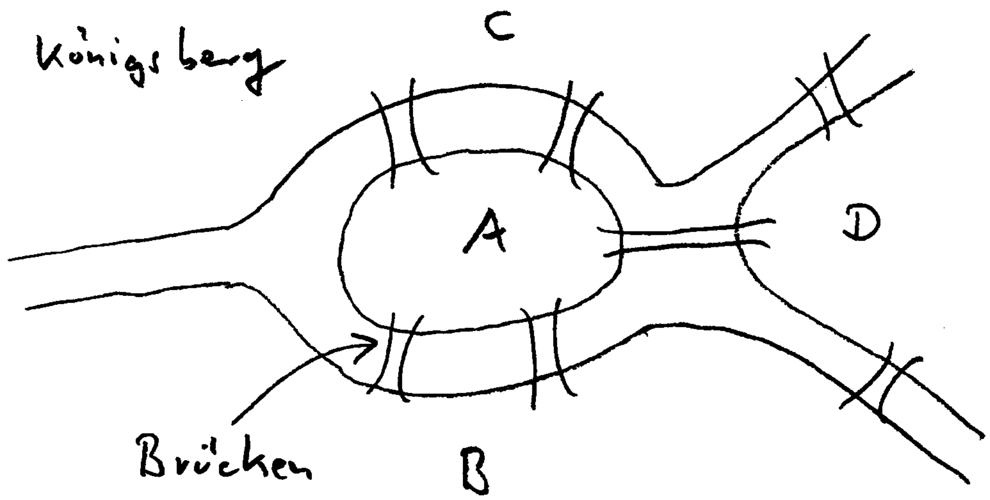
2. Wege in Graphen: Eulersche und Hamiltonische Graphen

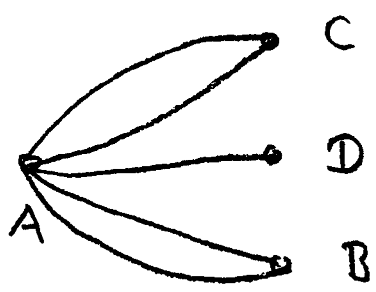
Die Graphentheorie nahm ihren Ausgangspunkt in folgendem Problem

2.1. Königsberger Brückenproblem



Gibt es einen Spazierweg, so dass man jede Brücke genau einmal überquert und zum Startpunkt zurückkehrt?

↳ Euler-Weg



Ein ähnliches Problem ergibt sich durch Vertauschen von Ecken und Kanten: Gibt es einen geschlossenen Weg, der jede Ecke genau einmal besucht?

↳ Hamilton-Weg
(oder Hamilton-Zykel)

<u>2.2. Def.:</u> 1) Für einen Graphen $G = (V, E)$ definieren wir:

<u>Weg</u> = Folge $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ $(k \geq 1)$
(zwischen v_0 und v_k) von Ecken $v_i \in V$ und Kanten $e_j \in E$
so dass gilt
$$\Psi(e_i) = (v_{i-1}, v_i) \quad \forall i = 1, .., k$$

<u>Länge</u> des Weges = Anzahl der Kanten, also k

<u>geschlossener</u> Weg = Weg mit $v_0 = v_k$

<u>Zykel</u> = geschlossener Weg, bei dem alle $v_1, .., v_k$ verschieden sind

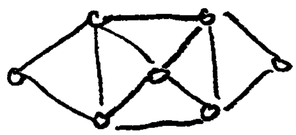
2) Ein Graph ist <u>zusammenhängend</u>, falls es jeweils einen Weg zwischen zwei beliebigen Vertices gibt.

3) Ein zshgder Graph G ist ein <u>Euler-Graph</u>, falls es einen geschlossenen Weg gibt, der jede Kante von G genau einmal durchläuft. Ein solcher Weg heißt dann <u>Euler-Weg</u>.

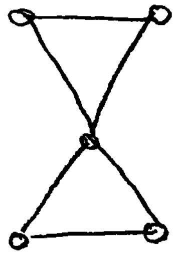
4) Ein zshgder Graph G ist ein <u>Hamilton-Graph</u>, falls es einen Zykel gibt, welcher jede Ecke von G durchläuft. Ein solcher Zykel heißt dann <u>Hamilton-Zykel</u>.

<u>2.3. Bem.</u>: 1) Ein Euler-Weg muß auch alle Vertices durchlaufen, aber eventuell öfters. Ein Hamilton-Zykel muß nicht alle Kanten benutzen.

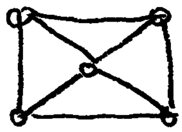
2) Es gibt keine Implikation zwischen beiden Problemen:



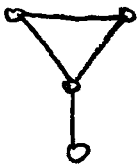
ist Euler- und Hamilton-Graph (aber beide Wege sind verschieden)



ist Euler-, aber nicht Hamilton-Graph



ist Hamilton, aber nicht Euler



weder .. noch ..

3) Obwohl beide Probleme sehr ähnlich aussehen, sind sie doch von ganz verschiedener Art:

- Euler-Problem: einfach, es gibt effektive Algorithmen
- Hamilton-Problem: schwierig, es gibt keine bekannten allgemeinen effekt. Alg.

4) Betrachte Euler-Problem: Bei einem Euler-Weg müssen wir jede Ecke, die wir über eine Kante betreten, über eine andere Kante verlassen

$\Rightarrow$ Notwendige Bedingung für Existenz von Euler-Weg: Jeder Vertex muß geraden Grad haben.

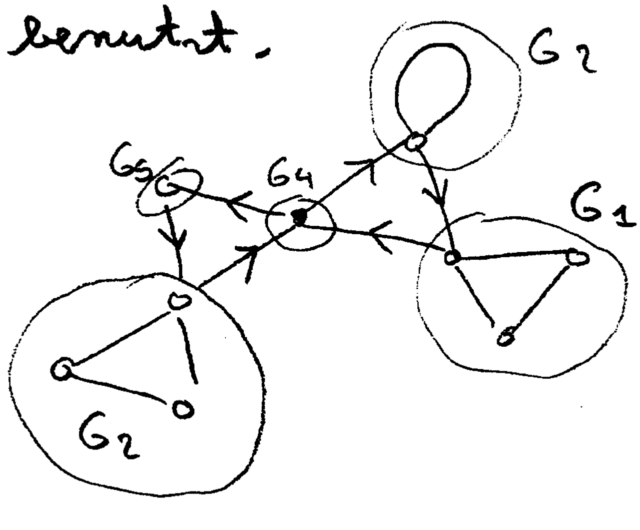
Dies ist aber auch schon hinreichend!

<u>2.4. Satz</u> (Euler 1736; erster vollständiger Beweis von Hierholzer 1873):

Ein zushgder Graph ist ein Euler-Graph genau dann wenn all seine Ecken geraden Grad haben.

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$": klar

"$\Leftarrow$" Starte irgendwo, wähle in jedem Schritt beliebig eine unbenutzte Kante, so lang wie möglich. Falls keine Kante mehr verfügbar, so müssen wir, aus Paritätsgründen, zum Anfangspunkt zurückgekehrt sein. Wir haben dann einen geschlossenen Weg T, der jede Kante höchstens einmal benutzt. Allerdings haben wir eventuell nicht alle Kanten benutzt.



Wenn wir die Kanten von T entfernen, zerfällt G in zushgde Komponenten $G_1,.., G_k$, wovon jeder nur Ecken mit geradzahligem Grad hat. (Grad = 0 ist auch möglich)

Jeder G_i ist kleiner als G; gemäß Induktion können wir also annehmen, dass jeder G_i ein Euler-Graph ist. Indem wir die entsprechenden Euler-Wege der G_i in den ursprünglichen Weg T einbauen erhalten wir einen Euler-Weg für G.
[Prüfe noch Induktionsanfang und beachte, dass Beweis auch für Schleifen und Mehrfachkanten gilt.] $\square$

<u>2.5. Bem.</u>: 1) Es gilt auch konstruktive direkte Algorithmen ⇝ Fleurys Algorithmus (1883)

2) Betrachte jetzt Hamilton-Problem.
Es ist keine allgemeine Lösung bekannt und auch kein effektiver Algorithmus, der Hamilton-Wege erzeugt.

3) Es gibt viele Theoreme mit hinreichenden Bedingungen. Insbesondere ist es einfacher einen Hamilton-Weg zu finden, wenn der Graph viele Kanten hat.

4) Beachte auch, dass wir für Hamilton-Problem o.E annehmen können dass G einfach ist

<u>2.6. Satz</u> (Ore 1960): Sei G ein einfacher Graph mit $n \geq 3$ Vertices, so dass

$$d(v) + d(w) \geq n$$

für alle nicht-benachbarten Vertices v, w gelte.

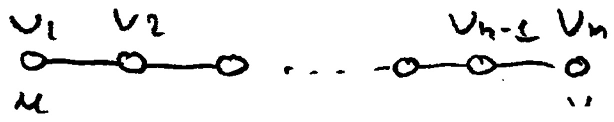
Dann ist G ein Hamilton-Graph.

[Beachte: Voraussetzung impliziert, dass G zshgd ist.]

<u>Beweis:</u> Annahme: G ist nicht Hamilton. Dann fügen wir solange weitere Kanten hinzu, bis jede weitere Kante ihn Hamilton machen würde. Bedingung des Satzes gilt dann auch für diesen Graphen, wir können also annehmen, dass G maximal nicht Hamilton ist. Betrachte nun $u, v \in V(G)$ mit $u \not\sim v$

(Solche gibt es, da $G = K_n$ Hamilton-Graph ist)

Fügen wir nun $e = uv$ als Kante hinzu, so ist $G + e$ Hamilton, d.h. es gibt einen Weg von u nach v, der alle Ecken von G genau einmal durchläuft.



$V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$

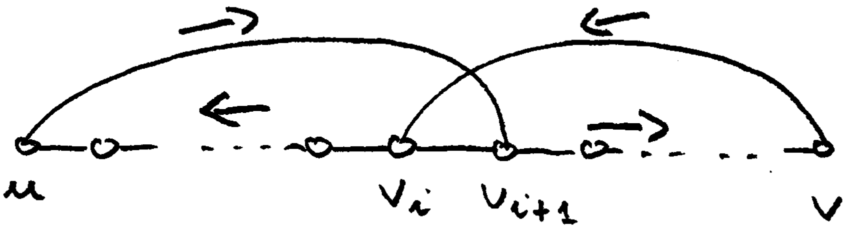
Falls es nun ein i gibt mit

$v_i \sim v$ und $v_{i+1} \sim u$

dann ist

$(u, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v, v_i, v_{i-1}, \dots, v_2, u)$

ein Hamilton-Zykel für G.



Aber ein solches i existiert nach Voraussetzung.

Setze $S := \{ i \mid u \sim v_{i+1} \} \subseteq \{1, 2, \dots, n-2\}$

$T := \{ i \mid v \sim v_i \} \subseteq \{2, \dots, n-1\}$

Wir haben $S \cup T \subseteq \{1, \dots, n-1\} \Rightarrow |S \cup T| \leq n-1$

Sei nun $S \cap T = \emptyset$. Dann ist

$|S \cup T| = |S| + |T| = d(u) + d(v) \geq n$

Wdsp $\lightning$

d.h. $\exists i \in S \cap T$ $\square$

<u>2.7. Def.</u>: Ein Graph heißt <u>bipartit</u>, falls es eine Zerlegung seiner Vertices in zwei disjunkte Klassen gibt, so dass jede Kante ihre Endpunkte in verschiedenen Klassen hat. Eine solche Zerlegung heißt dann <u>Bipartition</u>.

<u>2.8. Bem.</u>: 1) Meist spricht man die zwei Klassen als "weiße" und "schwarze" Vertices an.

2) Beachte, dass ein bipartiter Graph keine Schleifen haben kann.

3) Ist ein bipartiter Graph zshgd, so gibt es nur eine Bipartition (bis auf Austausch der zwei Klassen).

denn: nimm an es gebe zwei Bipartitionen von G.

$\Rightarrow \exists\, x, y \in V(G)$, so dass x, y in der gleichen Klasse für eine Partition, und in verschiedenen Klassen für andere Partition

G zshgd $\Rightarrow \exists$ Weg von x nach y

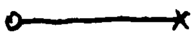
x, y in gleiche Klasse $\Rightarrow$ dieser Weg hat gerade Länge

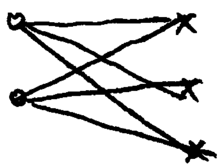
x, y in verschieden Klasse $\Rightarrow$ dieser Weg hat ungerade Länge

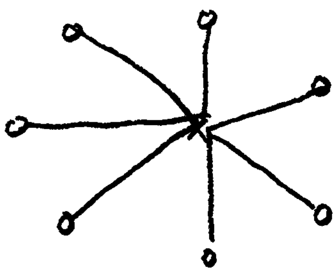
4) Für unzusammenhängende Graphen können wir schwarz und weiß in jeder Zusammenhangskomponente unabhängig voneinander vertauschen.

<u>2.9. Notation:</u> Ein <u>vollständiger bipartiter</u> Graph ist ein einfacher bipartiter Graph, in dem zwei Vertices genau dann benachbart sind, wenn sie in verschiedenen Klassen liegen.

$K_{n,m}$:= vollständige bipartite Graph mit n weißen und m schwarzen Ecken

$K_{1,1}$ 

$K_{2,3}$ 

$K_{n,1}$ = Stern 

<u>2.10. Satz</u> (König 1936): Ein Graph ist bipartit genau dann wenn er keinen Zyklus von ungerader Länge besitzt.

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" Jeder Schritt in einem Weg ändert die Klasse des Vertex, man kann also nur nach einer geraden Anzahl von Schritten zum Anfangspunkt zurückkehren.

"$\Leftarrow$" Da wir die Bipartition für jede Komponente unabhängig finden können, reicht es zushgde Graphen zu betrachten.

Sei also G ein zushgd Graph ohne ungeraden Zyklus. Wähle beliebig einen Vertex u und setze für $v \in V(G)$:

$$d(u,v) := \min \{ \text{Länge eines Weges von } u \text{ nach } v \}$$

(beachte, dass ein minimaler Weg jeden Vertex höchstens einmal enthält)

Dann definieren wir

$$A := \{ v \in V(G) \mid d(u,v) \text{ gerade} \}$$

$$B := \{ v \in V(G) \mid d(u,v) \text{ ungerade} \}$$

Wir haben $V(G) = A \cup B$, $A \cap B = \phi$

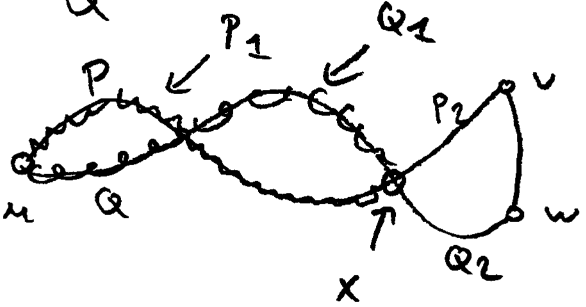
Beh.: Dies ist eine Bipartition von G.

Nimm an, es ist keine Bipartition, d.h.

$\exists$ v, w in gleicher Klasse mit $v \sim w$

Sei P ein kürzester Weg von u nach v

Q $\qquad\qquad\qquad\qquad$ u $\qquad$ w



Sei $x \in V(G)$ der letzte Schnittpkt von P mit Q (eventuell: $x = u$)

Sei Q_1 = Teil von	Q	von u nach	x
Q_2	Q	x	w
P_1	P	u	x
P_2	P	x	v

$\Rightarrow$ Länge von P_1 = Länge von Q_1

(andernfalls könnte man P oder Q kürzen, indem man P_1 durch Q_1 bzw. Q_1 durch P_1 ersetzt)

Da Länge$(P) \equiv$ Länge(Q) (mod 2) $\quad$ da u, v in gleicher Klasse

$\Rightarrow$ Länge$(P_2) \equiv$ Länge(Q_2) (mod 2)

$\Rightarrow$ Länge(P_2) + Länge(Q_2) ist gerade

Aber dann ist $x P_2 v w Q_2 x$ ein Zykel von ungerader Länge. ↯ $\square$