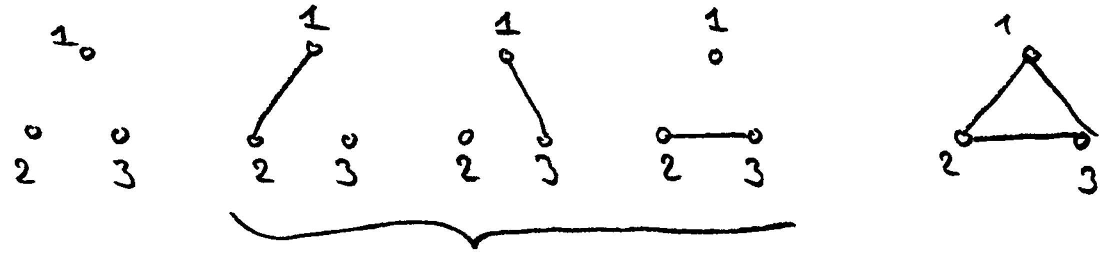
3. Isomorphismen von Graphen

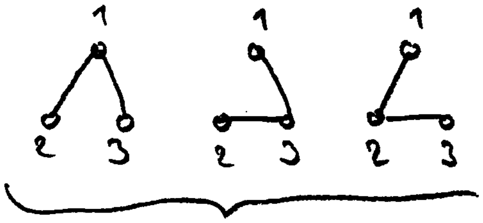
3.1. Motivation: Die konkreten Namen für Vertices und Kanten sind unwichtig; wir bezeichnen unsere Vertices also nun mit $1, 2, \dots n$.

Verschiedene Graphen können dann "isomorph" sein.

Beispiel: Es gibt 8 Graphen mit 3 Vertices:



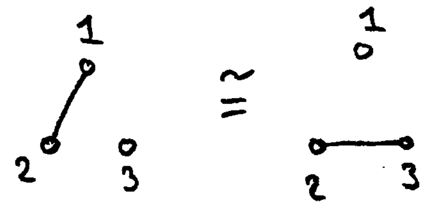
isomorph



isomorph

3.2. Def.: Ein Isomorphismus zwischen zwei Graphen G und H ist eine Bijektion f, welche $V(G)$ auf $V(H)$ und $E(G)$ auf $E(H)$ abbildet, so dass jede Kante e von G mit Endpunkten u und v auf eine Kante $f(e)$ von H mit Endpunkten $f(u)$ und $f(v)$ abgebildet wird. Wir schreiben dann: $G \cong H$

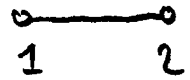
3.3. Bem.: 1) Für einfache Graphen bedeutet dies: $f : V(G) \to V(H)$ ist eine Bijektion, so dass: $u \sim_G v \iff f(u) \sim_H f(v)$



vermöge
$1 \to 2$
$2 \to 3$
$3 \to 1$

2) Für nicht-einfache Graphen muß auch die Struktur der Schleifen und der Mehrfachkanten erhalten bleiben.

ist nicht isomorph zu



3) "$\cong$" ist eine Äquivalenzrelation auf Graphen, liefert also Isomorphieklassen von Graphen.

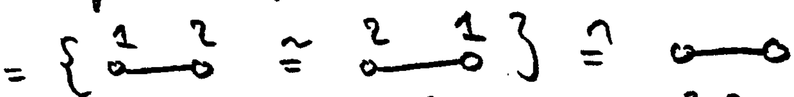
Im Englischen unterscheidet man

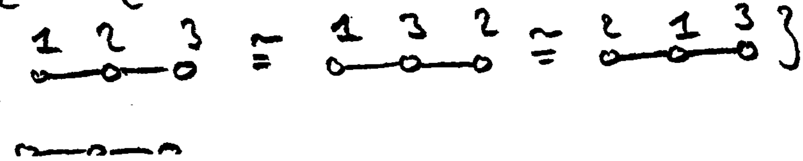
Graph $\longleftrightarrow$ Isomorphieklasse

gemäß

labeled graph $\longleftrightarrow$ unlabeled graph

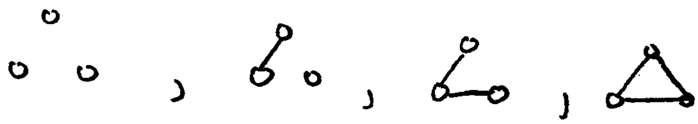
Oft identifiziert man einen Graph mit seiner Isomorphieklasse.

Bsp: $P_2 =$ 

$P_3 =$ 

4) Für Abzählprobleme macht es einen Unterschied, ob man verschiedene oder nicht-isomorphe Graphen zählt.

Beispiel: Für 3 Ecken gibt es 8 verschiedene einfache Graphen, aber nur 4 nicht-isomorphe einfache Graphen:



Das Zählen von verschiedenen einfachen Graphen ist einfach: Es gibt

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$ mögliche Kanten,

jede kann vorhanden sein oder nicht, also

$\#$ einfache Graphen mit n Ecken: $2^{\binom{n}{2}}$

$\#$ nicht-isomorphe —— " —— : ???

n	verschieden	nicht-isomorph
1	1	1
2	2	2
3	8	4
4	64	11

keine explizite Formel bekannt

5) Man hätte gerne *Graphinvarianten*, d.h. Funktionen

I : Graphen $\longrightarrow$ einfache Objekt (z.B. Zahlen)

mit : $G \cong H \Rightarrow I(G) = I(H)$

Außerdem sind folgende Eigenschaften erwünscht:

- I ist einfach zu berechnen
- I unterscheidet möglichst viele nicht-isomorphe Graphen

Am besten wären *vollständige* Invarianten, d.h. solche mit:

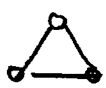
$$I(G) = I(H) \Rightarrow G \cong H$$

Solche gibt es wohl nicht.

Zu entscheiden, ob zwei Graphen isomorph sind, ist ein sehr schwieriges Problem (nicht bekannt, ob NP-vollständig)

3.4. Beispiele für Graphinvarianten:

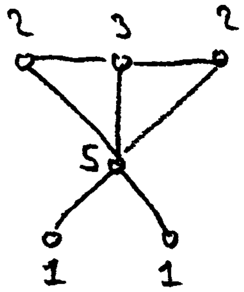
a) Anzahl der Vertices

 $\neq$  da verschieden viele Ecken

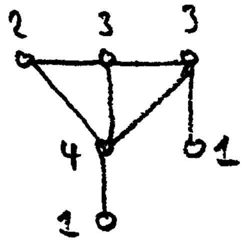
b) Anzahl der Kanten (Schleifen, Mehrfachkanten)

c) Grad-Folge = geordnetes Tupel der Grade der Vertices in monoton fallender Ordnung

Beispiel:



hat Grad-Folge 5, 3, 2, 2, 1, 1

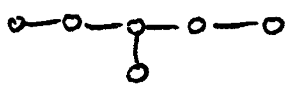
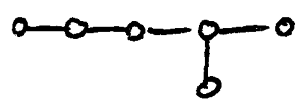


hat Grad-Folge 4, 3, 3, 2, 1, 1

somit können sie nicht isomorph sein.

Beachte: nicht-isomorphe Graphen können gleiche Grad-Folge besitzen:

3, 2, 2, 1, 1, 1 ist Grad-Folge von

 und 

Diese sind nicht-isomorph

d) Länge des längsten Weges mit verschiedenen Vertices

etc ...