4. Die Nachbarschaftsmatrix und Eigenwerte von Graphen

4.1. Def.: Sei G ein Graph mit $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Die <u>Nachbarschafts-matrix</u> ("adjacency matrix") von G ist die $n \times n$-Matrix

$$A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

wobei

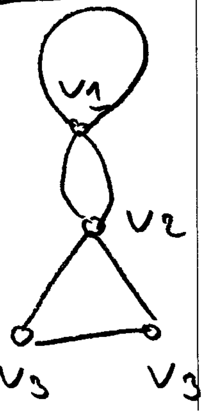
$$a_{ij} = \#\text{ Kanten in } G \text{ mit Endpunkten } (v_i, v_j)$$

4.2. Bem.: 1) Beachte: $A(G)$ ist eine symmetrische Matrix.

2) Für einfache Graphen ist $A(G)$ eine $(0,1)$-Matrix mit

$$a_{ij} = 1 \iff v_i \sim v_j$$

4.3. Beispiel:

$G =$ 

$$A(G) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_2 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \end{array}$$

4.4. Satz: Der i,j - Eintrag von $A(G)^k$ $(k \geq 1)$ zählt die Wege der Länge k mit Endpunkten v_i, v_j.

4.5. Beispiel: Für $A = A(G)$ aus 3.3. gilt:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Beweis von 4.4.: Sei $A(G) = A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$

$$\Rightarrow A^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=1}^n \quad \text{mit}$$

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{i(1),\dots,i(k)=1}^{n} \underbrace{a_{i\,i(1)}\, a_{i(1)\,i(2)} \cdots a_{i(k)\,j}}_{\#\text{ Wege mit Vertizes } v_i v_{i(1)} v_{i(2)} \dots v_j}$$

$\square$

4.6. Notation: Die Spur (trace) einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ist

$$Tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

<u>4.7. Korollar</u>: Sei $A = A(G)$ die Nachbarschaftsmatrix eines Graphen G. Dann gilt:

1) $\operatorname{Tr}(A^k) = \#$ geschlossenen Wege in G der Länge k.

Insbesondere haben wir für $k = 1$:

$$\operatorname{Tr}(A) = \# \text{ Schleifen in } G$$

2) Ist G einfach, dann ist

$$\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(A^2) = \# \text{ Kanten von } G$$

$$\frac{1}{6}\operatorname{Tr}(A^3) = \# \text{ Dreiecke in } G$$

<u>Beweis:</u> 1) klar

2) $a_{ii}^{(2)} = \#$ Wege der Form $v_i v_j v_i$ (wobei $v_j \neq v_i$)

$= d(v_i)$

$\Rightarrow \operatorname{Tr}(A^2) = \sum a_{ii}^{(2)} = \sum d(v_i) = 2 \cdot \#\text{Kanten}$

$a_{ii}^{(3)} = \#$ Wege der Form $v_i v_j v_k v_i$ (notwendigerweise alle drei Vertizes verschieden)

$= 2 \cdot \#$ Dreiecke welche Ecke v_i enthalten

↑ da $v_i v_j v_k v_i$ das gleiche Dreieck

wie ...

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(A^3) = \sum a_{ii}^{(3)} = 6 \cdot \#\,\text{Dreiecke}$ $\square$

<u>4.8. Bem.</u>: Isomorphe Graphen werden ineinander übergeführt, indem man die Vertices umbenennt. Auf dem Niveau der Nachbarschaftsmatrizen entspricht dies der Wirkung von Permutationsmatrizen.

Eine $n\times n$ $(0,1)$-Matrix ist eine <u>Permutationsmatrix</u>, falls es genau eine 1 in jeder Zeile und in jeder Spalte besitzt; somit ist sie von der Gestalt

$$P = (p_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad \text{mit} \quad p_{ij} = \delta_{i\pi(j)}$$

für eine Permutation $\pi \in S(n)$

(d.h. $\pi : [1,n] \to [1,n]$ ist Bijektion)

Wir haben dann

$$P^{-1} = (\tilde p_{ij}) \quad \text{mit} \quad \tilde p_{ij} = \delta_{i\pi^{-1}(j)} = \delta_{\pi(i)j}.$$

Für $A = (a_{ij})$ ist dann

$$P^{-1}AP = (b_{ij}) \quad \text{mit}$$

$$b_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \tilde p_{ik}\, a_{kl}\, p_{lj}$$

$$= \sum_{k,l} \delta_{\pi(i)k}\, a_{kl}\, \delta_{l\pi(j)}$$

$=$

d.h. die Wirkung von $A \mapsto P^{-1}AP$ ist also das Umnummerieren von Zeilen und Spalten gemäß π.

<u>4.9. Satz</u>: Zwei Graphen G_1 und G_2 sind isomorph genau dann wenn es eine Permutationsmatrix P gibt so dass gilt:

$$A(G_1) = P^{-1} A(G_2) P$$

<u>4.10. Bem.</u>: Beachte: das Konjugieren mit einer Permutationsmatrix ändert nicht die Eigenwerte der Matrix, somit sind die Eigenwerte von $A(G)$ also Invarianten für den Graph G.

<u>4.11. Def.</u>: Sei A eine $n \times n$-Matrix mit reellen Einträgen.

1) $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt <u>Eigenwert</u> von A, falls es ein $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ gibt, so dass

$$Ax = \lambda x$$

Ein solches x heißt dann <u>Eigenvektor</u> zu λ.

2) Das <u>charakteristische Polynom</u> von A ist

$\det(\lambda I - A)$

4.12. Erinnerung an Lineare Algebra:

1) Jede symmetrische n-n-Matrix A hat n unabhängige (sogar orthogonale) Eigenvektoren; die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, .., \lambda_n$ sind reell, und A kann durch eine orthogonale Transformation diagonalisiert werden: $\exists\ O$ mit $O^T O = O O^T = I$ und

$$O^T A O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

("Spektralsatz für symmetrische Matrizen")

2) Das charakteristische Polynom faktorisiert gemäß

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda I - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n),$$

d. h. die Eigenwerte sind Lösungen von

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

3) Beachte auch: $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(O^T A O)$

$$= \lambda_1 + .. + \lambda_n$$

4) Im Allgemeinen können einige der λ_i zusammenfallen, man muß sie mit ihren Multiplizitäten zählen.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat charakt. Polynom

$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)$; somit liefert $(\lambda-1)(\lambda^2-1)=0$

die Eigenwerte: $-1, 1, 1$

<u>4.13. Def.</u>: 1) Die <u>Eigenwerte</u> eines Graphen G sind die Eigenwerte von $A(G)$.

2) Die Liste aller Eigenwerte, gezählt mit Multiplizitäten, heißt <u>Spektrum</u> von G.

3) Das <u>charakteristische Polynom</u> ϕ_G von G ist das charakteristische Polynom von $A(G)$, d. h.

$$\phi_G(\lambda) := \det(\lambda I - A(G))$$

<u>4.14. Beispiel</u>: vollständige Graph K_n

$$A := A(K_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

Was sind Eigenvektoren?

Betrachte $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = (n-1)x$

also $(n-1)$ ist EW

Betrachte $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $x_1 + \dots + x_n = 0$

$$\Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 + \dots + x_n \\ x_1 + x_3 + \dots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -x$$

$\Rightarrow -1$ ist EW

beachte: $\{(x_1, .., x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist $(n-1)$-dim linearer Teilraum, d.h. es gibt (mindestens) $(n-1)$ unabh. EV zum EW -1

also: $\lambda = n-1$ Multiplizität 1

$\lambda = -1$ $n-1$

$$\Rightarrow \phi_{K_n}(\lambda) = (\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1}$$

<u>4.15 Bem.:</u> 1) Spektrum und charakteristisches Polynom enthalten die gleiche Information.

2) Seien A, B symmetrische reelle $n \times n$-Matrizen mit charakteristischen Polynomen ϕ_A und ϕ_B. Dann gilt:

$\phi_A = \phi_B \Leftrightarrow \exists$ orthogonale Transformation σ so dass gilt

$$A = \sigma^T B \sigma$$

3) Insbesondere gilt also: Seien G, H isomorphe Graphen

$\Rightarrow A(G) = P^{-1} A(H) P$ für eine Permutationsmatrix P

$\Rightarrow \phi_G = \phi_H$ da P orthogonal

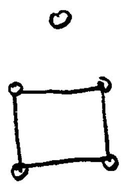
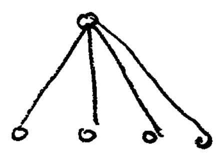
Somit gilt: Spektrum, charakteristisches Polynom sind Invarianten für Graphen

4) Aber: ϕ_G ist keine vollständige Invariante, sie kann nicht zwischen allen nicht-isomorphen Graphen unterscheiden.

denn: $\phi_G = \phi_H \Rightarrow \exists\, O : A(G) = O^T A(H) O$
aber O muß keine Permutationsmatrix sein

(Existenz von O hat keine Bedeutung auf der Ebene von Graphen.)

<u>4.16. Beispiele:</u> 1) Die beiden Graphen

$G =$  und $H =$ 

haben das gleiche Spektrum,

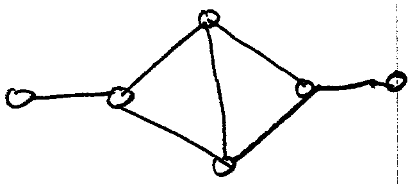
$\phi_G(\lambda) = \lambda^3(\lambda-2)(\lambda+2) = \phi_H(\lambda)$

sind aber nicht isomorph

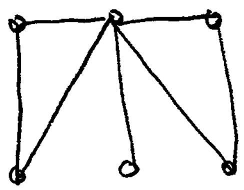
beachte auch: G ist nicht zshgd
H ist zshgd

somit kann Φ_G im Allgemeinen nicht benutzt werden, um zu entscheiden, ob ein Graph zshgd ist oder nicht

2) Auch innerhalb der Klasse der zshgden Graphen ist das Spektrum keine vollständige Invariante; z. B. haben



und



das gleiche Spektrum, sind aber nicht isomorph.

<u>4.17. Lemma:</u> Sei G bipartit. Ist λ ein Eigenwert von G mit Vielfachheit m, dann ist $-\lambda$ auch ein Eigenwert mit Vielfachheit m.

<u>Beweis:</u> $A = A(G)$ hat bzgl der Bipartition der Vertices die Form

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, m \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n} & \underbrace{\quad}_{m} \end{array} & \end{array}$$

wobei B eine $n \times m$-Matri

$n = \#$ weißen Ecken

$m = \#$ schwarzen Ecken

Sei nun $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $(x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m)$ Eigenvektor zu Eigenwert λ, d.h.

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}By\\ B^T x\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} By = \lambda x \\ B^T x = \lambda y \end{array}$$

Dann gilt aber

$$A\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-By\\ B^T x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$$

d.h. $\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$ ist EV zu EW $-\lambda$

Somit haben wir:

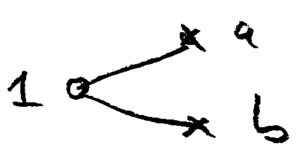
Für $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}$ unabh. Eigenvektoren zu λ

sind $\begin{pmatrix}x_1\\-y_1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}x_m\\-y_m\end{pmatrix}$ — " —— $-\lambda$

$\square$

<u>4.18. Bem.</u>: Dies sagt, dass EW von bipartiten Graphen paarweise auftreten. Allerdings, da $0 = -0$, kann 0 mit sich selbst gepaart sein.

Beispiel: $G = K_{1,2}$



$$A(K_{1,2}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & a & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ a \\ b \end{array}$$

$$\Rightarrow \phi_{K_{1,2}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2)$$

Somit: Eigenwerte: $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$

4.19. Satz: Die folgenden Aussagen über einen Graphen G sind äquivalent:

(a) G ist bipartit.

(b) Die von Null verschiedenen Eigenwerte von G kommen in Paaren λ_i, λ_j mit $\lambda_i = -\lambda_j$

(c) ϕ_G ist von der Gestalt

$$\phi_G(\lambda) = p(\lambda^2) \text{ oder } \phi_G(\lambda) = \lambda\, p(\lambda^2)$$

für ein Polynom p.

(d) $Tr(A(G)^k) = 0$ für alle ungeraden k

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b) war Lemma 4.17

(b) $\Leftrightarrow$ (c) klar, da $\phi_G(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$

und $(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_j) = \lambda^2 - a$

gdw $\lambda_i = -\lambda_j$

(b) $\Rightarrow$ (d) Es gilt

$$\mathrm{Tr}(A(G)^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

$$= \sum_{\substack{\text{Paare}\\ i,j}} \underbrace{(\lambda_i^k + \lambda_j^k)}_{\substack{\lambda_i^k - \lambda_i^k \\ = 0 \\ (\text{da } k \text{ ungerade})}} + \sum_{EV\,0} 0^k$$

$$= 0$$

(d) $\Rightarrow$ (a) Nach 4.7. zählt $\mathrm{Tr}(A(G)^k)$ die geschlossenen Wege der Länge k in G

$\overset{(d)}{\Longrightarrow}$ Es gibt keine geschlossenen Wege, insbesondere also keine Zykel, ungerade Länge

$\overset{2.10.}{\Longrightarrow}$ G bipartit $\square$