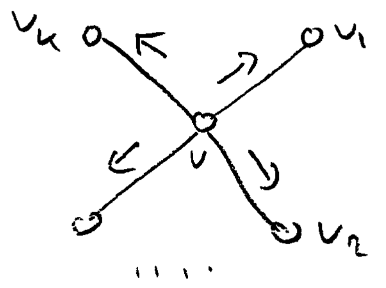
5. Reguläre Graphen: Eigenwerte, Expander und Irrfahrten

5.1. Def.: Ein Graph heißt k-regulär (für $k \in \mathbb{N}$), falls $d(v) = k \quad \forall v \in V(G)$.

5.2. Motivation: Im folgenden betrachten wir k-regulären Graph G mit Nachbarschaftsmatrix $A := A(G)$.

Wir setzen $P := \frac{1}{k} A \qquad P = (p_{ij})_{i,j=1}^{n}$

P gibt Übergangswahrscheinlichkeiten für Irrfahrt auf G.



Im jedem Zeitschritt gehen wir von einem Vertex v mit gleicher Wkeit $\frac{1}{k}$ zu seinen Nachbarn.

Sei $x_i(t) :=$ Wkeit zur Zeit t im Vertex v_i zu sein $(i = 1, \ldots, n)$

$$\Rightarrow x_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} x_j(t)\, p_{ji} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_j(t)$$

da P symmetrisch

Sei $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

Mathematische Fragestellung:

Wieviele Schritte braucht man in einer endlichen Markovkette um nah bei der Gleichgewichtsverteilung zu sein?

Populäre Umformulierung:

Wie oft muß man ein Kartenspiel mischen, damit es gut durchgemischt ist?

Mischen $\hat{=}$ Irrfahrt auf symmetrischer Gruppe

gut durchgemischt $\hat{=}$ Gleichgewichtsverteilung

$\rightsquigarrow$ Diaconis et al: 7 Riffle-Shuffles genügen für 52 Karten

<u>5.3. Satz:</u> Seien $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1}$ die Eigenwerte (mit Multiplizität) von $P = \frac{1}{k} A(G)$ für einen k-regulären Graphen G. Dann gilt:

1) $|\lambda_i| \leq 1 \quad \forall\, i = 0, \dots, n-1$

2) $\lambda_0 = 1$ hat Multiplizität l
$\iff$ G hat l Komponenten

Ist G zusammenhängend, dann ist der

eindeutige EV zum EW $\lambda_0 = 1$ gegeben durch die gleichmäßige Verteilung

$$x^{(\omega)} := \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^T$$

3) $\lambda_{n-1} = -1 \iff G$ ist bipartit

<u>Beweis</u>: Sei λ EW zu P mit EV $x = (x_1, \dots, x_n)^T$:

$$\lambda x = P x$$

d.h. $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \qquad \forall i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow |\lambda|\,|x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|p_{ij}|}_{= p_{ij}} \underbrace{|x_j|}_{\leq \max_j |x_j|}$$

$$\leq \max_j |x_j| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}_{= 1}$$

$$\overset{\max_i}{\Longrightarrow} |\lambda| \max_i |x_i| \leq \max_j |x_j|$$

$$\overset{\max |x_i| \neq 0}{\Longrightarrow} |\lambda| \leq 1$$

2) Reicht Fall $l=1$ zu betrachten, da:

$$G = G_1 \cup G_2 \implies P = \begin{pmatrix} \boxed{P_1} & 0 \\ 0 & \boxed{P_2} \end{pmatrix}$$

Blöcke P_1, P_2 können unabh. voneinander diagonalisiert werden

Sei also G zushgd

Dann ist $x^{(0)} = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^T$ EV zu EW $\lambda_0 = 1$

Sei $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ anderer EV zu $\lambda_0 = 1$, d.h.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \qquad \forall i = 1, \dots, n \qquad (*)$$

Sei i nun so dass $|x_i| = \max_j |x_j|$

o.E. $x_i > 0$, also

$$x_j \leq x_i \quad \forall j$$

$$(*) \implies \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \underbrace{(x_i - x_j)}_{\geq 0} = 0$$

$\implies x_i = x_j$ falls $p_{ij} \neq 0$

$\implies$ x ist konstant auf Nachbarn von i

Ersetze dann x_i durch x_j für $j \sim i$ und wiederhole obiges Argument

G zushgd $\implies x_1 = x_2 = \dots = x_n$

$\implies x = \alpha x^{(0)} \implies \lambda_0 = 1$ hat Multiplizität 1

3) „$\Leftarrow$": Sei G bipartit

$\Rightarrow$ EWe erscheinen in Paaren $\pm\lambda$

d.h. $\lambda_0 = +1 \Leftrightarrow \lambda_{n-1} = -1$

„$\Rightarrow$" o.E. G zushgd.

Sei $\lambda_{n-1} = -1$ mit EV $x = (x_1, .., x_n)^T$

d.h. $-x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j$

$\overset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow}$ $|x_1| = |x_2| = \dots = |x_n|$

Setze $A := \{ i \mid x_i > 0 \}$

$B := \{ i \mid x_i < 0 \}$

Prüfe nach, dass dies eine Bipartition liefert.

$\square$

5.4. Bem: 1) (2) hat eine weitreichende Verallgemeinerung für beliebige Markov-Ketten

$\rightsquigarrow$ Satz von Perron-Frobenius

2) Betrachte nun wieder Irrfahrt auf G.

Beachte: Ist G bipartit, so braucht es keine Konvergenz zu geben.

Beispiel: $\circ \overset{1}{\longleftrightarrow} \circ$

$\overset{1}{\circ}\!-\!\!-\!\overset{0}{\circ} \rightsquigarrow \overset{0}{\circ}\!-\!\!-\!\overset{1}{\circ} \rightsquigarrow \overset{1}{\circ}\!-\!\!-\!\overset{0}{\circ}$ etc

Deshalb schließen wir im Folgenden bipartite Graphen aus.

5.5. Satz: Sei G ein zushgder regulärer Graph, der nicht bipartit ist. Dann konvergiert $P^m x$, für jede Anfangsverteilung $x = (x_1, .., x_n)^T$ mit $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ für $m \to \infty$ gegen die gleichmäßige Verteilung $x^{(0)} = (\frac{1}{n}, .., \frac{1}{n})^T$.

Beweis: Wir zeigen Konvergenz bzgl. der Euklidischen Norm

$$\|(x_1, .., x_n)\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Wir zerlegen x bzgl einer orthogonalen Basis, welche durch die EVen von P gegeben wird: $x^{(0)}, x^{(1)}, .., x^{(n-1)}$

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^{(i)}$$

$$\Rightarrow P^m x = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \underbrace{P^m x^{(i)}}_{\underbrace{\lambda_i^{(m)} x^{(i)}}_{\xrightarrow{m \to \infty} 0}}$$

falls $|\lambda_i| < 1$

d.h. für $i \neq 0$

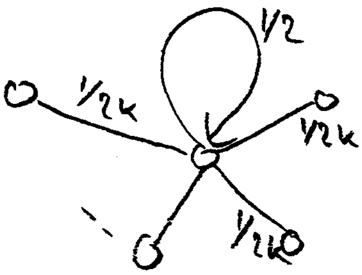
$$\Rightarrow P^m x \xrightarrow{m \to \infty} \alpha_0 x^{(0)}$$

beachte: $\underset{\sum x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}}{\langle x, x^{(0)} \rangle} = \alpha_0 \underbrace{\langle x^{(0)}, x^{(0)} \rangle}_{\sum \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}}$

$\Rightarrow \alpha_0 = 1 \qquad \Rightarrow P^m x \xrightarrow{m \to \infty} x^{(0)}$ $\square$

5.6. Bem.: 1) Die Konvergenzrate wird im wesentlichen bestimmt durch den EW mit größtem $|\lambda| \neq 1$, also entweder λ_1 oder λ_{n-1}.

2) Beachte jedoch: Gehen wir zur "lazy" Irrfahrt über gemäß

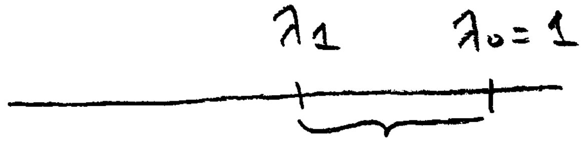


$$P \to \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} P$$

$$\lambda_i \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lambda_i$$

so verschieben sich die EW gemäß

Somit ist λ_1 der wesentliche EW, um schnelles Mischen zu erreichen!



"spectral gap"
spektrale Lücke

3) Somit entspricht

große spektrale Lücke $\hat{=}$ gute Mischungseigenschaften

Eine andere Bedeutung ist auch

— " — $\hat{=}$ "Zufälligkeit" eines Graphen

5.7. Motivation: Wie groß kann die spektrale Lücke sein? Betrachte jetzt wieder $A = A(G)$ $\leadsto \lambda_0 = k$

Grobe Abschätzung:

$$\lambda := \max_{i \neq 0} |\lambda_i|$$

$$Tr(A^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^2$$

$$\| $$

$$2 \cdot \#\text{Kanten} = k \cdot n$$

$$\Rightarrow k \cdot n = Tr(A^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^2$$

$$\leq k^2 + (n-1)\lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \geq \frac{k(n-k)}{n-1} \sim k \quad \text{für großes } n$$

$$\Rightarrow \lambda \gtrsim \sqrt{k}$$

Eine präzisere Schranke ist folgende.

5.8. Satz (Alon + Boppana 1986): Für jede Folge von k-regulären Graphen $G_{n,k}$ mit $n = \# V(G_{n,k}) \to \infty$ gilt:

$$\liminf_{n \to \infty} \lambda(G_{n,k}) \geq 2\sqrt{k-1}$$

Dabei bezeichnet λ die spektrale Lücke

Diese Schranke kann erreicht werden

<u>5.9. Def</u>: Ein <u>Ramanujan-Graph</u> ist ein k-regulärer Graph, für den gilt

$$\lambda \leq 2\sqrt{k-1}\,.$$

Dabei bezeichnet λ das Maximum der Beträge aller nicht-trivialer ($\neq \pm k$) Eigenwerte.

<u>5.10. Bem</u>: 1) Ein wichtiges Problem ist: konstruiere, für festes k, eine Folge G_n von k-regulären Ramanujan-Graphen.

2) Bis vor kurzem waren solche Konstruktionen nur für spezielle Form von k bekannt, und basieren auf tiefen zahlentheoretischen Resultaten (daher der Name "Ramanujan"),

$\rightsquigarrow$ Konstruktionen für $k = p+1$, p Primzahl

Lubotzky, Philipps, Sarnak

1988

Margulis

oder auch für $k = p^{\nu} + 1$

3) 2014 haben Marcus, Spielmann, Srivastava mit anderen Methoden für "beliebige" k solche Familien konstruiert

"Nebenbei" haben sie dabei noch das Kadison-Singer-Problem von 1959 gelöst.

4) Obwohl es schwierig ist, Ramanujan-Graphen explizit zu konstruieren, sind zufällige Graphen mit hoher Wkeit fast Ramanujan. Es gilt

<u>Satz</u> (Friedman 2003): $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Prob}\left(\lambda(G_n) \leq 2\sqrt{k-1} + \varepsilon\right) = 1$$

wobei G_n ein zufälliger k-regulärer mit n Ecken ist.