

## 6. Bäume

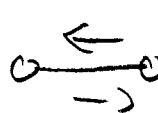
(6-1)

6.1. Bem.: Unser Def. 2.2. für

Zykel ist im Fall  $k=2$  irreführend.

Wir wollen auch, dass alle Kanten in einem Zykel verschieden sind. Für  $k \geq 3$  ist dies automatisch, aber nicht für  $k=2$ :

 ist Zykel, aber

 ist kein Zykel

6.2. Def.: 1) Ein Pfad (zwischen  $v_0$  und  $v_k$ )

ist ein Weg  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$

der Länge  $k \geq 0$ , bei dem alle  $v_1, \dots, v_k$  und alle Kanten  $e_1, \dots, e_k$  verschieden sind.

2) Ein Zykel ist ein geschlossener Pfad der Länge  $k \geq 1$ .

[Es gibt also einen Pfad der Länge 0, aber dies ist kein Zykel!]

G.3. Def.: 1) Ein Wald (forest) ist ein Graph ohne Zykel.

2) Ein Baum (tree) ist ein zusammenhängender Wald

3) Ein Blatt (leaf) ist ein Vertex mit Grad 1.

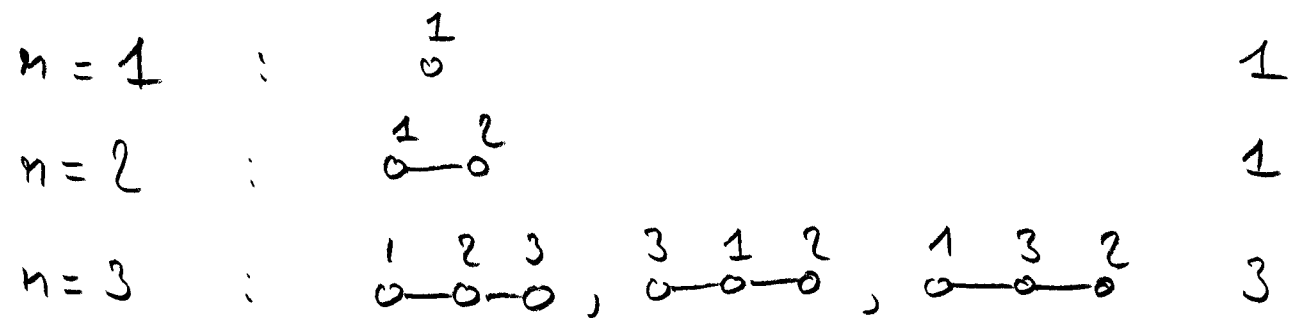
G.4. Bem.: 1) Jede Komponente von einem Wald ist ein Baum.

2) kein Zykel  $\Rightarrow$  keine Schleifen  
keine Mehrfachkanten

$\Rightarrow$  Wald, Baum sind einfache Graphen

3) Wald / Baum haben keine Zykel, also keine ungeraden Zykel, sind also nach 2.10 bipartit.

G.5. Beispiele: 1) verschiedene Bäume mit n Ecken:

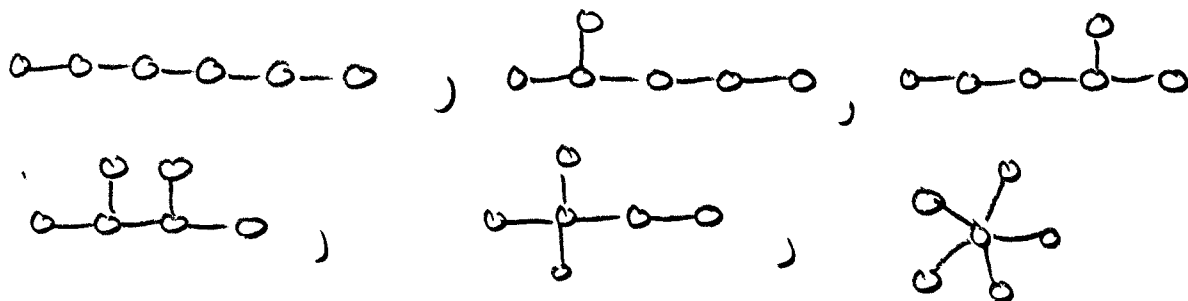


$$n = 4 : 16$$

$$n = 5 : 125$$

⋮

2) Für  $n=6$  gibt es 1296 verschiedene Bäume, mit 6 Isomorphieklassen:



G.6.Lemma: Sei  $G$  ein Baum mit  $n$  Ecken.

1) Ist  $n \geq 2$ , dann hat  $G$  mindestens zwei Blätter

2) Das Entfernen eines Blattes <sup>sowie aller einfallenden Kanten</sup> ergibt einen Baum mit  $n-1$  Ecken.

Beweis: 1)  $G$  zushgd,  $n \geq 2 \Rightarrow \exists$  Pfade der Länge  $k \geq 1$ . Sei  $P$  ein maximaler Pfad in  $G$  (d. h. Pfad maximaler Länge); diesen verbinde  $u$  und  $v$ .

$P$  ist kein Zykel  $\Rightarrow u \neq v$

und  $d(u) = 1 = d(v)$

(ansonsten könnte man den Pfad verlängern)

2) Sei  $v$  ein Blatt von  $G$ , d.h.

(G-4)



$G$  zushgd  $\Rightarrow G'$  zushgd

$G$  ohne Zykel  $\Rightarrow G'$  ohne Zykel

$\Rightarrow G'$  ist Baum mit  $n-1$  Ecken  $\square$

G.7. Satz: Sei  $G$  ein Graph mit  $n \geq 1$

Ecken. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

a)  $G$  ist ein Baum (d.h. zushgd + ohne Zykel)

b)  $G$  ist zushgd und hat  $n-1$  Kanten

c)  $G$  hat  $n-1$  Kanten und keine Zykel

d) Für alle  $u, v \in V(G)$  gibt es genau einen Pfad zwischen  $u$  und  $v$ .

Beweis: a)  $\Rightarrow$  b) durch Induktion  
stimmt für  $n=1$

Betrachte Baum  $G$  mit  $n \geq 2$

6.6)  $G$  hat Blatt  $v$  und nicht so aus:



wobei  $G'$  Baum mit  $n-1$  Ecken ist

Ind-Vor  $\Rightarrow G'$  hat  $n-2$  Ecken  $\Rightarrow G$  hat  $n-1$  Ecken

b)  $\Rightarrow$  c) : Sei  $G$  zusammenhängend mit  $n-1$  Kanten (6-5)

z.z.:  $G$  hat keine Zyklen

Annahme:  $G$  habe Zyklen

Wir entfernen dann solange Kanten aus den Zykeln bis wir einen zusammenhängend, zyklenfreien Graphen  $\tilde{G}$  erhalten

(Beachte: Entfernen einer Kante aus Zyklen erhält Zusammenhang)

$\tilde{G}$  Baum  $\stackrel{a) \Rightarrow b)}{=} \tilde{G}$  hat  $n-1$  Kanten mit  $n$  Ecken

da  $G$   $n-1$  Kanten hat  $\Rightarrow G = \tilde{G}$

d.h.  $G$  hat keine Zyklen.

c)  $\Rightarrow$  a)  $G$  habe  $n-1$  Kanten und keine Zyklen

Seien  $G_1, \dots, G_k$  die Zusammenhangskomponenten von  $G$

$G$  ohne Zyklen  $\rightarrow$  jedes  $G_i$  hat keine Zyklen

$\forall i: G_i$  zusammenhängend  $\Rightarrow G_i$  Baum ohne Zyklen

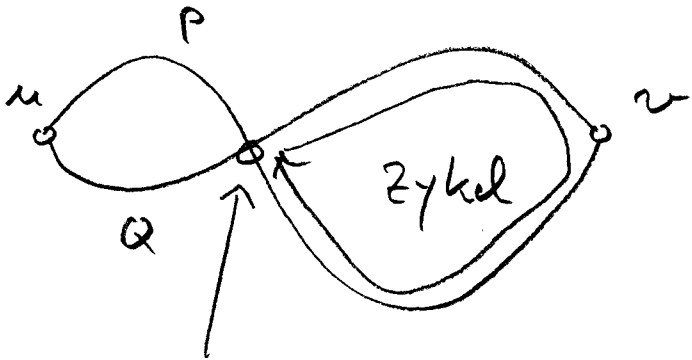
$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^k |E(G_i)|}_{= E(G) = n-1} & \stackrel{a) \Rightarrow b)}{=} \sum_{i=1}^k (|V(G_i)| - 1) = \underbrace{|V(G)|}_n - k \end{aligned}$$

$\Rightarrow k = 1$

$\Rightarrow G$  zusammenhängend

a)  $\Rightarrow$  d)  $G$  zusammenhängend  $\Rightarrow \exists u, v$ -Pfad

Gäbe es zwei verschiedene  $u, v$ -Pfade,  
so hätten wir einen Zykel

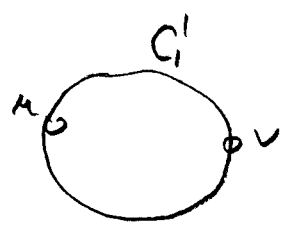


letzter Schritt zwischen  
 $P$  und  $Q$

d)  $\Rightarrow$  a) Gibt Pfad zwischen beliebigen  $u, v$

$\Rightarrow G$  zusammenhängend

Falls es einen Zykel gibt



dann gilt es  $\forall u, v \in V(C_1)$  zwei verschiedene  
 $u, v$ -Pfade

$\Rightarrow G$  hat keine Zykel

6.8. Satz 2 (Inklusions-Exklusions-Prinzip):

Serien  $A_1, \dots, A_n$  Teilmengen einer endlichen Menge. Für  $\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, n\}$  setzen wir

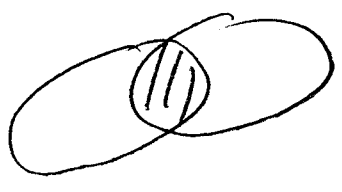
$$A_I := \bigcap_{i \in I} A_i$$

Dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} |A_I|$$

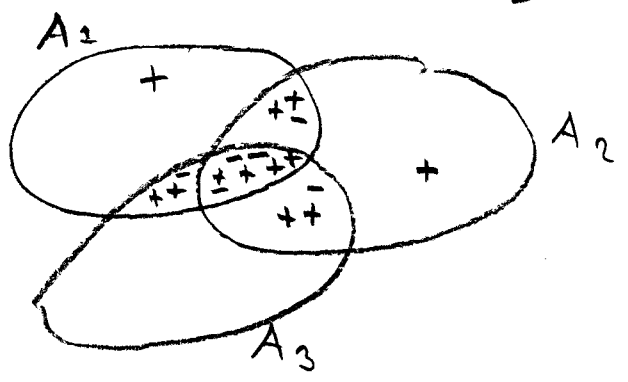
6.9. Beispiele:  $n = 2$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



$n = 3$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$



Beweis für  
allgemeines  $n$   
ist analog

6.10. Anwendung: Seien  $n, r \in \mathbb{N}$  fest. Setze (6-8)

$$A_i := \{(k_1, \dots, k_n) \mid k_\ell \in \{1, \dots, n\} \forall \ell\}$$

$$\Rightarrow A_I = \{(k_1, \dots, k_n) \mid k_\ell \in \{1, \dots, n\} \setminus I \forall \ell\}$$

$$\text{d. h. } |A_I| = (n - |I|)^r$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \{(k_1, \dots, k_n) \mid \exists i \forall \ell : k_\ell \neq i\}$$

$$= [1, n]^r \setminus \{(k_1, \dots, k_n) \mid \text{alle } i=1, \dots, n \text{ tauchen unter } k_1, \dots, k_n \text{ auf}\}$$

aber: dies ist nicht möglich,  
falls  $r < n$

Somit haben wir für  $r < n$ :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = [1, n]^r, \text{ d. h. } \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = n^r$$

und somit nach 6.8.

$$n^r = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} (n - |I|)^r$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)^r$$

Wir haben also folgendes gezeigt:



6.11. Satz: Für alle  $r, n \in \mathbb{N}$  mit  $r < n$  gilt:

$$n^r = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)^r$$

6.12. Anwendung: Sei

$T_n := \# \{ \text{verschiedene Bäume auf } n \text{ Vertices } v_1, \dots, v_n \}$

und setze

$A_i := \{ \text{Bäume mit Vertices } v_1, \dots, v_n \mid v_i \text{ Blatt, d.h. } d(v_i) = 1 \}$

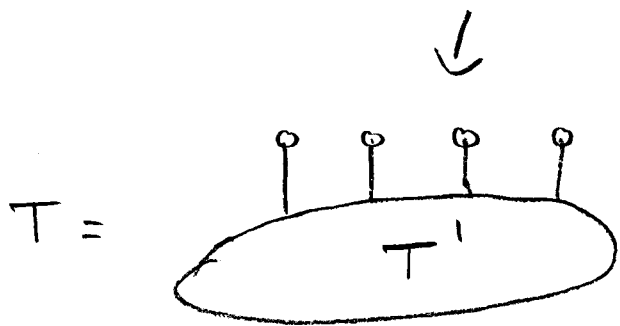
$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i = \{ \text{alle Bäume mit Vertices } v_1, \dots, v_n \}$

(da jeder Baum mindestens zwei Blätter hat)

$$\Rightarrow \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = T_n \quad \text{für } n \geq 2$$

Was ist

$$A_I = \bigcap_{i \in I} A_i = \{ \text{Bäume} \mid d(v_i) = 1 \ \forall i \in I \}$$



$\leftarrow v_i \ (i \in I)$

$\leftarrow$  dies ist ein beliebiger Baum  $T'$  mit  $(n - |I|)$  Ecken

beachte: für  $n=2$  kann  $T'$  leer sein, sonst nicht  $n \geq 3$

Für jedes  $v_i \ (i \in I)$  gibt es  $(n - |I|)$  Wahlen für einen Nachbarn aus  $T'$

(beachte: verschiedene  $v_i$  können gleichen Nachbarn haben)

$$\Rightarrow |A_I| = (n - |I|)^{|I|} T_{n - |I|}$$

Somit gilt für  $n \geq 3$ :

$$T_n = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \cdot (n - |I|)^{|I|} T_{n - |I|}$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (n-i)^i \binom{n}{i} T_{n-i}$$

Damit ergibt sich

$n =$	1	2	3	4	5
$T_n =$	1	1	3	16	125

6.13. Satz von Cayley (1889): Für jedes  $n \geq 2$  ist die Anzahl der verschiedenen Bäume mit  $n$  Knoten gleich

$$T_n = n^{n-2}$$

Beweis: durch Induktion

$n = 2 : T_2 = 1 = 2^0$  ✓

$n-1 \rightarrow n$ : Gemäß 6.12. gilt ( $n \geq 3$ )

$$T_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (n-i)^i \binom{n}{i} \underbrace{T_{n-i}}_{(n-i)^{n-i-2}}$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (n-i)^{n-2} \stackrel{6.11}{=} n^{n-2} \quad \square$$

6.14. Bem.: 1) Es gibt keine bekannte explizite Formel für die Anzahl der Isomorphieklassen von Bäumen.

2) Die einfache Formel  $n^{n-2}$  suggeriert, dass es eine "schöne" Bijektion zwischen Bäumen und Tupel von  $\{1, \dots, n\}^{n-2}$  geben sollte. Das ist in der Tat der Fall.

6.15. Algorithmus (Prüfer Code, 1918):

Input: Baum  $T$  mit Ecken  $\{1, \dots, n\}$

Iteration: im  $i$ -ten Schritt, entferne das kleinste noch vorhandene Blatt und setze  $a_i :=$  Nachbar von diesem Blatt

Stoppe nach  $n-2$  Schritten

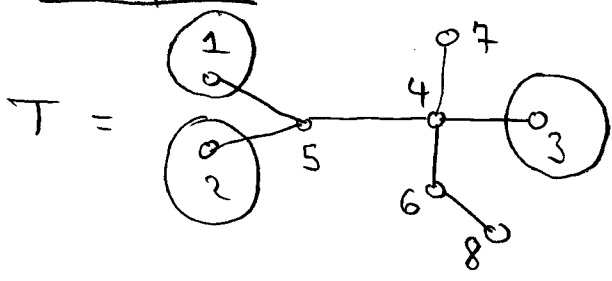
Output:  $(a_1, \dots, a_{n-2})$

Man kann zeigen, dass  $T \mapsto (a_1, \dots, a_{n-2})$

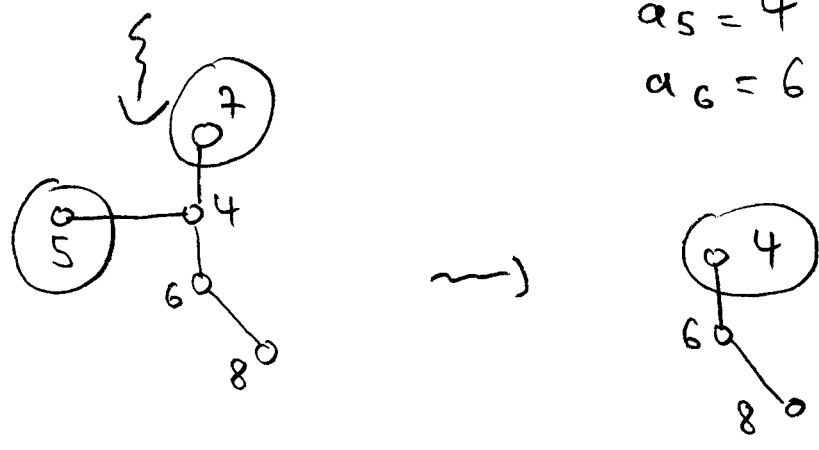
Bäume  $\rightarrow \{1, \dots, n\}^{n-2}$

in der Tat eine Bijektion ist; dies ergibt dann einen anderen Beweis von Cayleys Formel

Beispiel:



- $a_1 = 5$
- $a_2 = 5$
- $a_3 = 4$
- $a_4 = 4$
- $a_5 = 4$
- $a_6 = 6$



also: Prüfer Code von T ist  
 $(5, 5, 4, 4, 4, 6)$

Aus diesem kann man T wieder eindeutig rekonstruieren.

6.16. Def.: 1) Ein Untergraph (subgraph)

eines Graphen  $G$  ist ein Graph  $H$  mit  $V(H) \subset V(G)$  und  $E(H) \subset E(G)$ , so dass die Zuordnung der Kanten zu den Endpunkten in  $H$  die gleiche ist wie in  $G$ .

Damit erhalten wir  $H$  von  $G$  indem wir Kanten und/oder Knoten entfernen.

2) Ein erzeugender Untergraph (spanning subgraph) von  $G$  ist ein Untergraph mit  $V(G)$  als Knotermenge, d.h. ein Graph, den man aus  $G$  durch Entfernen von Kanten erhält.

3) Ein erzeugender (oder maximaler) Unterbaum ist ein erzeugender Untergraph, der ein Baum ist.

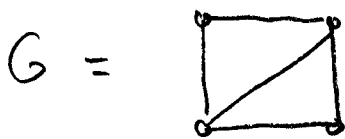
4) Mit  $\tau(G)$  bezeichnen wir die Anzahl der erzeugenden Unterbäume von  $G$ .

6.17. Beispiele: 1) Da ein Baum zusammenhängend ist, gilt  $\tau(G) = 0$  für unzusammenhängende Graphen.

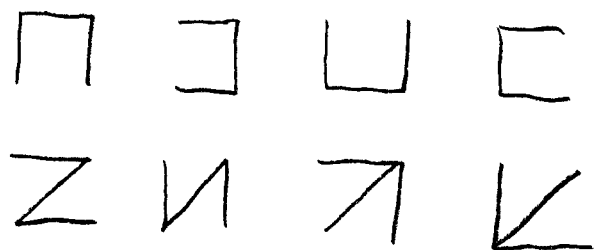
2) Cayley Theorem 6.13 sagt

$$\tau(K_n) = n^{n-2}$$

3) Betrachte



Dann gibt es folgende erzeugende Unterbäume



$\Rightarrow \tau(G) = 8$

6.18. Def.: Sei  $G$  ein Graph ohne Schleifen mit Knotenmenge  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

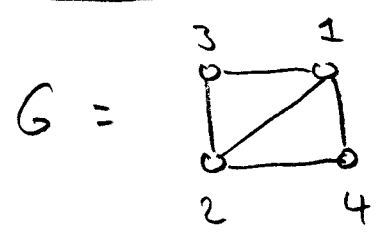
Die Laplace Matrix von  $G$  ist

$$L(G) := D(G) - A(G).$$

Dabei ist  $A(G)$  die Nachbarschaftsmatrix von  $G$  und  $D(G)$  ist die Diagonalmatrix der Knotengrade:

$$D(G) = \begin{pmatrix} d(v_1) & & & \\ & d(v_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d(v_n) \end{pmatrix}$$

6.19. Beispiele:



Drachen "kite"

$$\Rightarrow L(G) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

G 20. Satz (Matrix Tree Theorem, Kirchhoff 1847)

Sei  $G$  ein Graph ohne Schleifen.  $\tilde{L}_{kl}(G)$  berechne die Matrix, die man aus  $L(G)$  durch Streichen der  $k$ -ten Zeile und  $l$ -ten Spalte erhält. Dann gilt für beliebiges  $k, l \in [n]$ :

$$\tau(G) = \det(\tilde{L}_{k,l}(G)) \cdot (-1)^{k+l}$$

G 21 Beispiel: 1)  $G = \text{kite}$

$k = l = 1$

$$\Rightarrow \tilde{L}_{1,1}(G) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\tilde{L}_{1,1}(G)) = 12 - 2 - 2 = 8 = \tau(G)$$

$k = l = 3$

$$\Rightarrow \tilde{L}_{3,3}(G) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(\tilde{L}_{3,3}(G)) &= 18 - 1 - 1 - 3 - 2 - 3 \\ &= 8 \\ &= \tau(G) \end{aligned}$$

$$k=1, l=2$$

$$\Rightarrow \tilde{L}_{1,2}(G) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\tilde{L}_{1,2}(G)) = -4 - 2 - 2 = -8 = -\tau(G)$$

$$2) G = K_n$$

Cayleys Formel 6.13 ergibt sich aus dem Matrix Tree Theorem als Spezialfall

$$L(K_n) = \left. \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \right\}_n$$

$$\Rightarrow \tilde{L}_{1,1}(K_n) = \left. \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} \right\}_{n-1}$$

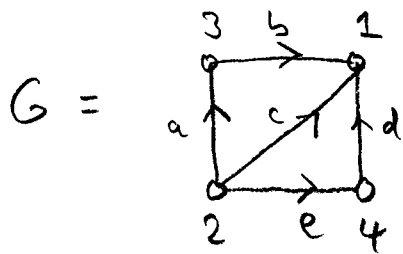
beachte:  $\det(\tilde{L}_{1,1}(K_n)) = \Phi_{K_{n-2}}(n-1)$

Es gilt:  $\Phi_{K_n}(\lambda) = (\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1}$   
nach 4.14

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau(K_n) &= \Phi_{K_{n-2}}(n-1) \\ &= [(n-1) - (n-2)] n^{n-2} \\ &= n^{n-2} \end{aligned}$$



Beweisskizze für 6.20: (groß, für Bsp 6.19) (6-12)



$k = \ell = 4$

$$\Leftrightarrow \tilde{L}(G) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Betrachte jetzt Inzidenzmatrix (beliebige Orient)

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \Rightarrow M M^T = L(G)$$

Setze nun

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow \tilde{L}(G) = \tilde{M} \tilde{M}^T$$

kandidaten für erzeugende Unterbräume

$\rightarrow$  wähle drei  <sup>$n-1$</sup>  kanten von  $G$

$\hat{=}$  wähle  $3 \times 3$ -Untermatrix  $B$  von  $\tilde{M}$

man hat Zykel

$\hat{=}$   $\det B = 0$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ a+b-c=0 \end{matrix}$$

man hat keinen Zykel

$\hat{=}$   $\det B = \pm 1$

$$\begin{matrix} a & b & d \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +1 \end{matrix}$$

Entwickle sodann die Determinante von  $L(G)$  nach Determinanten von Teilmatrizen von  $\tilde{M}$  (Formel von Binet-Cauchy), also in den  $\det B$  wie oben, und zähle dabei die erzeugenden Unterbäume von  $G$ . □

6.22. Bemerkung: Im Spezialfällen hat der Satz von Kirchhoff nützliche Umformulierungen:

i) Ist  $G$  ein einfacher Graph mit  $n$  Knoten, so gilt:  $\tau(G) = \frac{1}{n^2} \det(J + L(G))$ ,

wobei

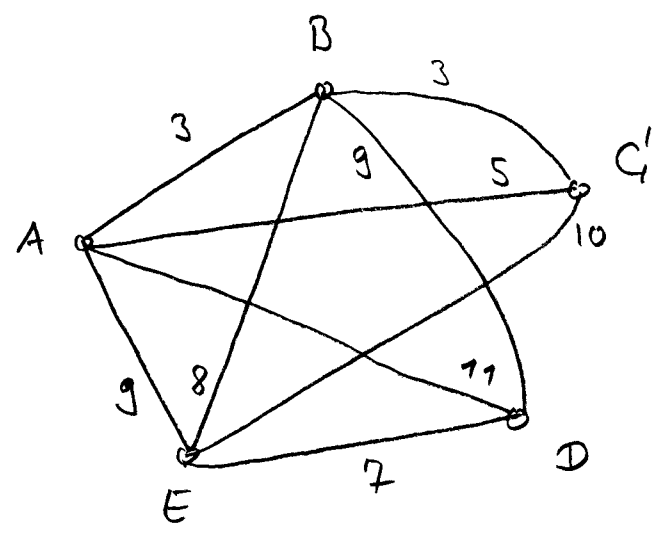
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Ist  $G$  unisgd und  $k$ -regulär, dann gilt

$$\tau(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=2}^n (k - \lambda_i)$$

(Produkt über EW  $\neq k$ ,  $\lambda_1 = k$  hat Multiplizität 1)

6.23. Motivation: Betrachte die Kosten des Baus von Kommunikationsnetzen zwischen Städten



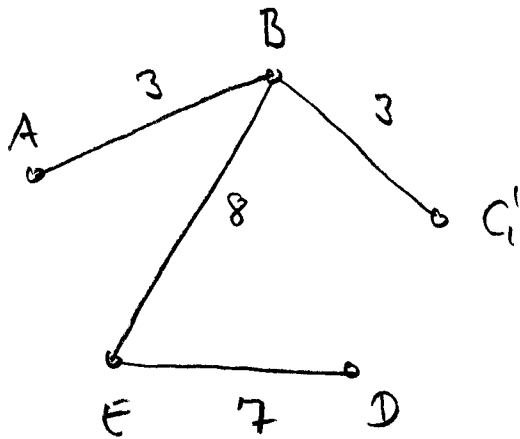
"gewichteter Graph"  
 = Graph mit Gewichtsfunktion  
 $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$

- Ziel: Bause eine Verbindung (Untergraph), so dass
- o jede Stadt ist Teil vom Netzwerk, (d.h. Untergraph ist zusammenhängend)
  - o Gesamtkosten sind minimal
- kosten = Summe der Gewichte aller Untergraphen

Gäbe es Zyklen, dann könnten wir weitere Kanten entfernen.

→ Wir suchen "minimalen erzeugenden Unterbaum", d.h. einen erzeugenden Unterbaum  $T$ , so dass  $w(T) = \sum_{e \in T} w(e)$  minimal ist unter allen erzeugenden Unterbäumen

kanonische Algorithmen in obigem Beispiel:



6.24. Algorithmus von Kruskal ("Greedy" Algorithmus)

Input: zusammenhängender Graph mit Gewichtsfunkt  
 $w: E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$

Algorithmus: Wähle von den noch nicht  
benutzten Kanten diejenige mit minimalen  
Gewicht, so dass dadurch kein Zykel  
erzeugt wird

Output: zusammenhängender Teilgraph ohne Zykel, d.h.  
ein erzeugender Unterbaum  
(nach  $n-1$  Schritten, falls  $n = |V(G)|$ )

6.25. Satz (Kruskal, 1956): Der Algorithmus  
von Kruskal liefert einen erzeugenden Unter-  
baum mit minimalem Gesamtgewicht.


Beweis: Sei  $T$  das Ergebnis von Kruskals Alg.

Ann:  $\exists$  einen erzeugenden Unterbaum  $T^*$  mit  
 $w(T^*) < w(T)$

Wir nummerieren die Kanten, wie sie in  
Kruskals Alg. vorkommen

$$T = e_1 e_2 \dots e_k e_{k+1} \dots e_{n-1}$$

$$T^* = e_1 e_2 \dots e_k \quad \# \quad \dots$$

$\Rightarrow T^* =$   Hinzunahme von  $e_{k+1}$  zu  
 $T^*$  gibt einen Zykel

$T$  enthält  $e_{k+1}$ , kann also nicht alle anderen  
Kanten dieses Zyklus enthalten, also  $\exists e'$ :  
 $e' \in T^*$ ,  $e' \notin T$

beachte:  $e'$  war mögliche Wahl für  $T$  im  
( $k+1$ )-ten Schritt (kein Zykel mit  $e_1, \dots, e_k$ )  
d.h.  $w(e_{k+1}) \leq w(e')$

Betrachte jetzt  $T^{**} := T^* + e_{k+1} - e'$   
 $\Rightarrow w(T^{**}) \leq w(T^*) < w(T)$

aber  $T^{**}$  stimmt mit  $T$  auf längeren  
Anfangsstücken überein.

$\leadsto$  ersetze in obigem Argument  $T^*$  durch  $T^{**}$   
Iteriere dies bis  $T^{* \dots *} = T$

$$\Rightarrow w(T) = w(T^{* \dots *}) \leq \dots \leq w(T^{**}) \leq w(T^*) < w(T)$$

Widerspruch  $\Downarrow$

6.26. Bem: 1) Minimale erzeugende Unterbaum  
muß nicht eindeutig sein.

z. B.: falls  $w(e) = 1 \quad \forall e \in E(G)$

dann ist jeder erzeugende Unterbaum ein  
minimaler

2) Die Nicht-Eindeutigkeit kann jedoch  
nur von der Wahl zwischen Kanten mit  
gleichen Gewichten kommen. Somit gilt:  
Sind alle Gewichte in einem ungerichteten  
Graphen verschieden, dann gibt es genau  
einen minimalen erzeugenden Unterbaum.