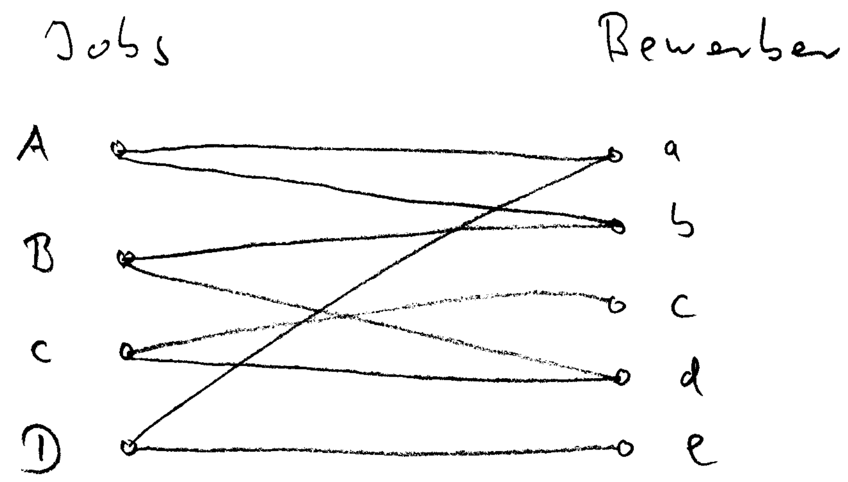
# 7. Matchings

## 7.1. Beispiel:

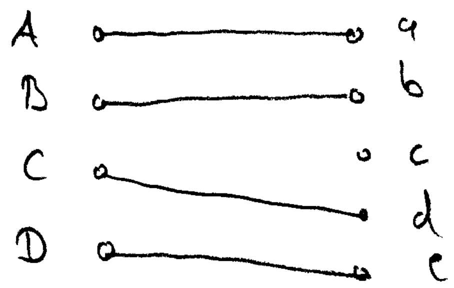



Kanten verbinden Bewerber mit Jobs, für die sie qualifiziert sind

Frage: Können alle Jobs mit qualifizierten Bewerbern besetzt werden?

Gibt es ein "Matching" zwischen Jobs und Bewerbern, so dass alle Jobs gefüllt sind?

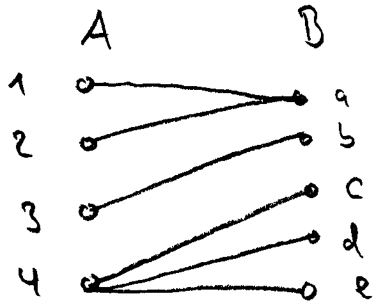
Antwort: ja, z. B.



<u>7.2. Def</u>: Sei $G$ ein bipartiter Graph mit Bipartition $A, B$. Ein <u>Matching</u> (oder Paarung) <u>von $A$ nach $B$</u> ist eine injektive Abbildung $f: A \to B$, so dass $(a, f(a))$ eine Kante von $G$ ist für alle $a \in A$.

Ist ein Matching von $A$ nach $B$ auch ein Matching von $B$ nach $A$ (d.h. $f$ ist bijektiv), dann heißt es ein <u>perfektes Matching</u>.

<u>7.3. Beispiel:</u>




Es gibt hier kein Matching von $A$ nach $B$, da $\{1, 2, 3\}$ zu wenig Nachbarn hat, nur $\{a, B\}$

<u>7.4. Notation</u>: Sei $S \subset V(G)$. Mit $N(S)$ bezeichnen wir die Vertices von $G$, welche einen Nachbarn in $S$ haben.

<u>7.5. Satz</u> (Hall, 1935): Ein bipartiter Graph mit Bipartition $A, B$ besitzt genau dann ein Matching von $A$ nach $B$ falls gilt:

$$|N(S)| \geq |S| \quad \text{für alle } S \subset A.$$

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" Die $|S|$ vielen Vertizes, die mit $S$ gepaart sind, liegen in $N(S)$.

"$\Leftarrow$" durch Induktion nach $|A|$

$|A| = 1$ : Beh. wahr ✓

Induktionsschritt: Sei $|A| \geq 2$ und nimm an Beh. ist schon gezeigt für alle $\tilde{A}, \tilde{B}$-bipartite Graphen mit $|\tilde{A}| < |A|$

Es gilt nun zwei Möglichkeiten:

i) $|N(S)| \geq |S| + 1 \quad \forall\ \emptyset \neq S \subsetneqq A$

ii) $|N(S)| = |S|$ für ein $S \subset A$
$\emptyset \neq S \neq A$

Fall i) Wähle beliebige Kante $e = ab \in G$
$(a \in A, b \in B)$

und betrachte $\tilde{G} := G - \{a, b\}$

(entferne Knoten $a, b$ und alle eingehenden Kanten)

$\Rightarrow \tilde{G}$ ist $\tilde{A}, \tilde{B}$ - bipartiter Graph mit

$$\tilde{A} = A \setminus \{a\}$$
$$\tilde{B} = B \setminus \{b\}$$

also $|\tilde{A}| = |A| - 1 < |A|$

Außerdem erfüllt $\tilde{G}$ Halls Bedingung:

Für alle $\emptyset \neq \tilde{S} \subset \tilde{A} \subsetneq A$ gilt:

$$|N_{\tilde{G}}(\tilde{S})| \geq \underbrace{|N_G(\tilde{S})|}_{\geq |\tilde{S}| + 1} - 1 \geq |\tilde{S}|$$

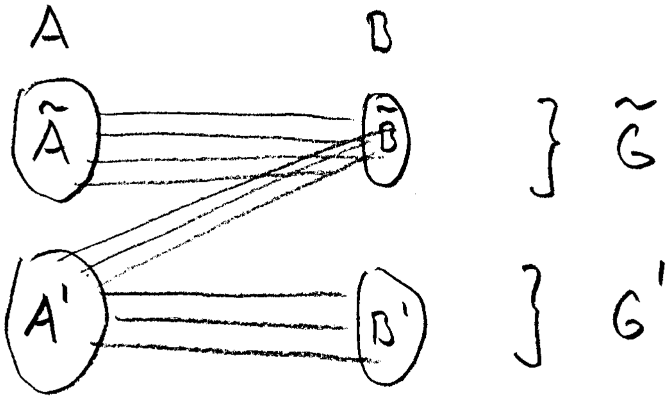
nur b ist eventuell als Nachba verlaren gegangen

Ind. An. $\Longrightarrow$ Es gibt ein Matching von $\tilde{A}$ nach $\tilde{B}$

Füge Kante ab hinzu, ergibt dann Matching von $A$ nach $B$.

Fall ii) Sei $\emptyset \neq \tilde{A} \neq A$ mit $|N(\tilde{A})| = |\tilde{A}|$

Wir setzen $\tilde{B} := N(\tilde{A})$




$A' := A \setminus \tilde{A}$

$B' := B \setminus \tilde{B}$

Betrachte jetzt den

$\tilde{A}, \tilde{B}$-bipartiten Graphen $\tilde{G}$ (enthält alle Kanten zwischen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$)

und den

$A', B'$-bipartiten Graphen $G'$ ( —— " —— $A'$ und $B'$)

Dann gilt: ∘ $\tilde{G}$ erfüllt Halls Bedingung, denn:

$S \subset \tilde{A}$: $|N_{\tilde{G}}(S)| = |N_G(S)| \geq |S|$

- $G'$ erfüllt auch Halls Bedingung, denn:

Ann: Sei $S \subset A'$ mit $|N_{G'}(S)| < |S|$

Dann betrachte $\tilde{S} := S \cup \tilde{A} \subset A$

$$\Rightarrow N_G(\tilde{S}) = N_{G'}(S) \cup \tilde{B}$$

$$\Rightarrow |N_G(\tilde{S})| = \underbrace{|N_{G'}(S)|}_{<|S|} + \underbrace{|\tilde{B}|}_{=|N(\tilde{A})| = |\tilde{A}|}$$

$$< |S \cup \tilde{A}| = |\tilde{S}| \quad \text{Wdsp}$$

also: $|N_{G'}(S)| \geq |S| \quad \forall S \subset A'$

Da $|\tilde{A}| < |A|$ und $|A'| < |A|$

$\overset{\text{Ind Ann}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Matching von $\tilde{A}$ nach $\tilde{B}$

und — " — $A'$ nach $B'$

Zusammengenommen ergibt dies dann ein Matching von $A = A' \cup \tilde{A}$ nach $B = B' \cup \tilde{B}$ $\square$

<u>7.6. Bem</u>: 1) Beachte: Mehrfachkanten sind in Aussage und Beweis von Halls Theorem erlaubt.

2) Im Fall $|A| = |B|$ ist jedes Matching perfekt; der Satz heißt dann auch "Heiratssatz".
($A \hat{=} \{$Männer$\}$, $B \hat{=} \{$Frauen$\}$; falls es für jede Teilmenge von $n$ Männern mindestens $n$

geeignete Frauen gilt, dann kann man sie in Paaren verheiraten.

7.7. Korollar: 1) Betrachte einen $A, B$-bipartiten Graph. Falls für ein $k \geq 1$ gilt

$$d(a) \geq k \quad \forall a \in A \quad \text{und}$$
$$d(b) \leq k \quad \forall b \in B,$$

dann gibt es ein Matching von $A$ nach $B$

2) Insbesondere besitzt ein $k$-regulärer Graph ein perfektes Matching.

Beweis: 1) Prüfe Halls Bedingung nach:

Sei $S \subset A \Rightarrow$ mindestens $k|S|$ Kanten gehen von $S$ aus, höchstens $k$ können in einem $b \in B$ enden, d.h. mindesten $\frac{1}{k}(k|S|)$ Vertices von $B$ müssen Endpkte von diesen Kanten sein

$$\Rightarrow |N(S)| \geq \frac{1}{k}(k|S|) = |S|$$

2) Nach (1) gibt es Matching von $A$ nach $B$.

Nun gilt: $k|B| = |E| = k|A|$

$$\Rightarrow |A| = |B|$$

d.h. Matching ist perfekt $\square$

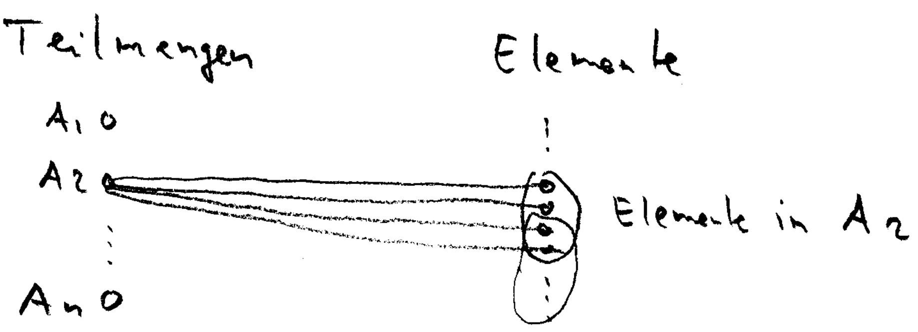
<u>7.8 Beispiel</u>: Wenn jeder Junge mindestens $k$ Mädchen kennt und jedes Mädchen kennt höchstens $k$ Jungs, dann kann man jeden Jungen mit einem Mädchen paaren, welches er kennt.

<u>7.9. Korollar</u> ("Repräsentantensystem"):
Ein System von verschiedenen Repräsentanten $a_1, .., a_n$ mit $a_i \in A_i$ kann von einer Familie $A_1 .. A_n$ von Teilmengen einer Menge $B$ genau dann gewählt werden wenn

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |I|$$

für jede Teilmenge $I \subset \{1, .., n\}$ gilt.

<u>Beweis</u>: Betrachte bipartiten Graph mit Bipartition $A, B$, wobei $A = \{A_1, .., A_n\}$ und Kanten $A_i \text{———} b$ gdw $b \in A_i$



Wahl eines Repräsentantensystems

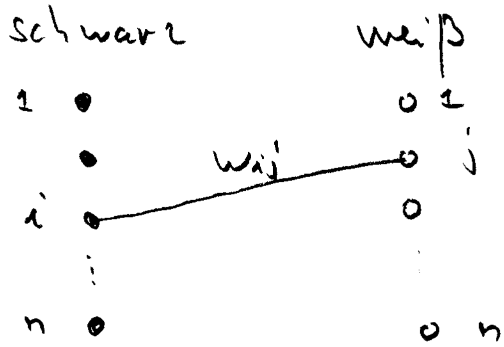
$\hat{=}$ Matching von $A$ nach $B$

Bedingung des Theorems $\Longleftrightarrow$ Halls Bedingung $\square$

<u>7.10 Def.</u>: Betrachte den bipartiten vollständigen Graphen $K_{n,n}$ mit Gewichtsfunktion

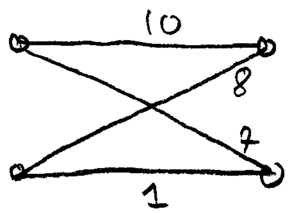
$w: E \to \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ..\}$,

gegeben durch eine Matrix $(w_{ij})_{i,j=1}^{n}$

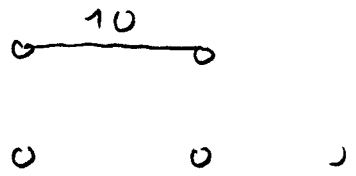



Ein <u>maximales Matching</u> (maximal transversal) ist ein perfektes Matching $M$ von $K_{n,n}$, so dass das Gesamtgewicht $w(M) := \sum_{e \in M} w(e)$ maximal unter allen perfekten Matchings ist.

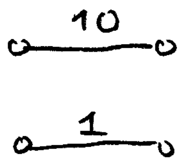
<u>7.11. Bem</u>: 1) Solch ein bestes Matching zu finden ist nicht so einfach wie im Fall der minimalen Spannbäume. Betrachte den gewichteten $K_{2,2}$:



Ein greedy Algorithmus würde so vorgehen

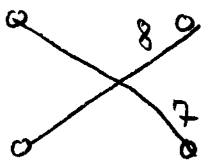



, dann




= 11

Das ist aber nicht optimal, nimm




= 15

2) Beachte: verschiedene perfekte Matchings bestehen aus verschiedenen Kanten, aber ihre Endpunkte ergeben immer alle Vertices.

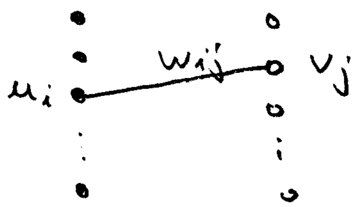
⇝ es wäre besser wenn wir Gewichte an den Knoten hätten

<u>7.12. Def.</u>: Sei ein Gewicht $w = (w_{ij})_{i,j=1}^{n}$ für $K_{n,n}$ gegeben. Tupel $u_1, \dots, u_n$ und $v_1, \dots, v_n$ heißen <u>Knotenüberdeckung</u> (cover) für $w$ falls gilt

$$u_i + v_j \geq w_{ij} \qquad \forall\, i,j$$

Die Kosten einer solchen Überdeckung sind

$$c(u,v) := \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$$



**7.13 Lemma:** Für jedes perfekte Matching $M$ und jede Knotenüberdeckung $(u, v)$ gilt

$$c(u,v) \geq c(M).$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $M$ nur aus Kanten besteht für welche jeweils $u_i + v_j = w_{ij}$ gilt. In einem solchen Fall ist $M$ ein maximales Matching und $(u,v)$ eine minimale Knotenüberdeckung

**Beweis:** $u_i + v_j \geq w_{ij} \quad \forall i, j$

$\downarrow$ Summation über Matching $M$

$$c(u,v) = \sum u_i + \sum v_j \geq \sum_{e \in M} w_{ij} = c(M)$$

$c(u,v) = c(M) \iff$ Gleichheit für alle "$\geq$", die in Summe auftauchen

$\iff u_i + v_j = w_{ij} \quad \forall$ Kanten in $M$

**7.14. Bem.:** Lemma sagt, dass Suche nach maximalem Matching und nach minimaler Knotenüberdeckung duale Probleme sind. Insbesondere, eine minimale Knotenüberdeckung liefert auch maximales Matching.

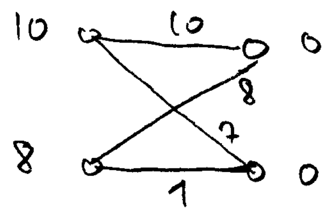
Wir suchen: Knotenüberdeckung, so dass die Kanten mit $u_i + v_j = w_{ij}$ ein perfektes Matching ergeben

Idee: Starte mit beliebiger Überdeckung und verbessere es durch Erniedrigen seiner Kosten

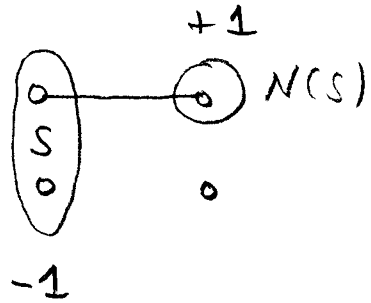
**7.15. Notation:** Der Equality Teilgraph $G_{u,v}$ für eine Überdeckung $(u,v)$ ist der erzeugende Teilgraph von $K_{n,n}$, der aus den Kanten besteht für welche $u_i + v_j = w_{ij}$ gilt

**7.16. Beispiel** Wir müssen $(u,v)$ so verbessern, dass $G_{u,v}$ ein perfektes Matching hat

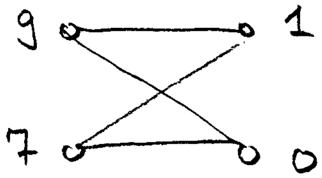
Starte mit trivialer Überdeckung




$\rightsquigarrow G_{u,v} =$

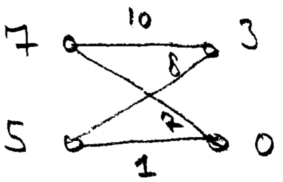



$\rightsquigarrow$

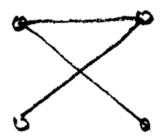



⋮

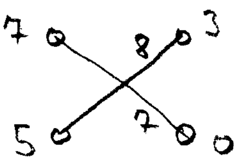
$\rightsquigarrow$




$\rightsquigarrow G_{u,v} =$



$\Rightarrow$ Matching




$c(M) = 15 = c(u,v) = 7+3+5+0$

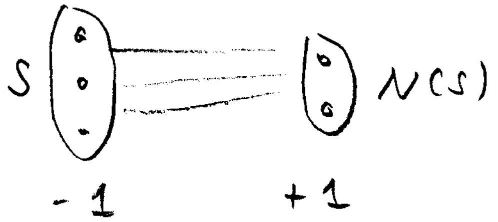
## 7.17. Ungarischer Algorithmus (Kuhn 1955):

Starte mit beliebiger Knotenüberdeckung
(z.B.: $u_i = \max_j w_{ij}$ , $v_j = 0$)

Iteration: Falls $\mathcal{G}_{u,v}$ ein perfektes Matching hat, dann ist dies nach Lemma 7.13 maximal.
Ansonsten ist Halls Bedingung nicht erfüllt, d.h. $\exists\ S \subset \{1, \dots, n\}$ mit $|N(S)| < |S|$
Dann ändern wir die Überdeckung $(u, v)$ zu $(u', v')$ gemäß

$$u_i' := u_i - 1 \qquad \text{falls } i \in S$$
$$v_j' := v_j + 1 \qquad \text{falls } j \in N(S)$$

ansonsten unverändert




Es gilt: i) $(u', v')$ ist auch Überdeckung

$$u_i \overset{w_{ij}}{\circ\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\circ} v_j$$

$\downarrow$ $\quad\quad$ $\downarrow$

| | | |
|---|---|---|
| $u_i - 1$ | $v_j + 1$ | $i \in S$, $j \in N(S)$ |
| $u_i - 1$ | $v_j$ | $i \in S$, $j \notin N(S) \Rightarrow (i,j) \notin \mathcal{G}_{u,v}$ <br> d.h. $u_i + v_j > w_{ij}$ <br> $\Rightarrow u_i - 1 + v_j \geq w_{ij}$ |
| $u_i$ | $v_j + 1$ | $i \notin S$, $j \in N(S)$ |
| $u_i$ | $v_j$ | $i \notin S$, $j \notin N(S)$ |

also: in allen Fällen okay

ii) $c(u', v') = \sum u_i' + \sum v_j'$

$$= \sum u_i - |S| \cdot 1 + \sum v_j + |N(S)| \cdot 1$$

$$= c(u,v) \underbrace{- |S| + |N(S)|}_{< 0 \quad (\text{d.h. } \leq -1)}$$

$$\leq c(u,v) - 1$$

Iteriere dies $\rightsquigarrow$ Folge von Überdeckungen mit fallenden Kosten

Da Kosten nach unten beschränkt (durch $c(M)$)

$\Rightarrow$ Iteration stoppt nach endlich vielen Schritten

Der zugehörige $G_{u,v}$ hat dann ein perfektes Matching und dies ist maximal.

<u>7.18. Satz</u>: Der ungarische Algorithmus findet ein maximales Matching und eine minimale Knotenüberdeckung

<u>7.19. Bem</u>: 1) Falls Gewichte rational, führe dies auf natürliche Gewichte zurück durch Multiplikation mit gemeinsamen Vielfachen der Nenner. Falls Gewichte reell, verfeinere Iterationsschritt.

2) Das Finden eines maximalen Matchings beruht darauf perfekte Matchings in $G_{u,v}$ zu finden. Halls Theorem sagt uns, ob solche existieren oder nicht, es gibt aber auch einfache (polynomiale) Algorithmen um solche zu finden ("M-alternating path" and "M-augmenting path")