8. Färbung von Graphen

8.1. Def.: 1) Eine <u>k-(Knoten-) Färbung</u> eines Graphen G ist eine Abbildung

$$f: V(G) \to C \quad \text{mit } |C| = k$$

(Elemente von C heißen "Farben").

2) Eine Färbung ist <u>zulässig</u> (oder gültig), falls benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

3) Ein Graph ist <u>k-färbbar</u>, falls es eine zulässige k-Färbung gibt.

4) Die <u>chromatische Zahl</u> $\chi(G)$ ist das kleinste k, so dass G k-färbbar ist. G heißt dann <u>k-chromatisch</u>.

8.2. Bem.: 1) Beachte:

2-färbbar $\hat{=}$ bipartit

also: k-färbbar $\hat{=}$ k-partit

2) Graphen mit Schleifen sind unfärbbar. Mehrfachkanten sind irrelevant fürs Färbungsproblem. Wir werden somit im folgenden nur einfache Graphen betrachten.

3) Es gilt die triviale Abschätzung:

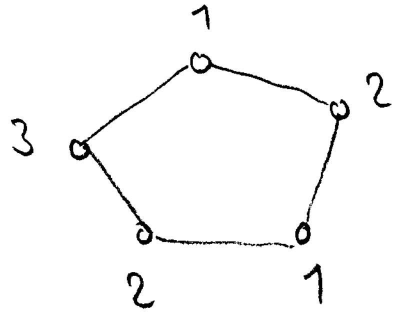
$$\chi(G) \le |V(G)|$$

4) Hat G die folgenden Komponenten $G_1, \dots, G_r$, dann ist

$$\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \dots, \chi(G_r)\}$$

<u>8.3. Beispiele</u>: 1) C_n = Zykel mit n Knoten ($n \ge 3$)

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & n \text{ gerade} \\ 3 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$



2) $\chi(K_n) = n$

$\chi(K_{n,m}) = 2$ (da bipartit)

<u>8.4. Bemerkung</u>: Es gibt keine Formel oder guten Algorithmus für $\chi(G)$ im Allgemeinen. Berechnung von $\chi(G)$ ist eins der klassischen NP-vollständigen Probleme.

8.5. Notation: Für einen Graphen G setzen wir

$$\Delta(G) := \max \{ d(v) \mid v \in V(G) \}$$
$$\delta(G) := \min \{ d(v) \mid v \in V(G) \}$$

8.6. Satz: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Beweis: Benutze greedy Algorithmus: Färbe Knoten in beliebig gewählter Reihenfolge und benutze neue Farbe nur, falls dies durch schon gefärbte Nachbarn erzwungen wird. Da jeder Knoten höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn hat, reichen $\Delta(G)+1$ Farben aus. $\square$

8.7. Bemerkung: Beachte, dass Gleichheit in 8.6. auftreten kann:

Falls $G = K_n \Rightarrow \Delta(K_n) = n-1$

also: $\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$

Falls $G =$ ungerader Zykel C_{2k+1}

$\Rightarrow \Delta(C_{2k+1}) = 2$

also: $\chi(C_{2k+1}) = 3 = \Delta(C_{2k+1}) + 1$

Dies sind aber im wesentlichen schon alle Fälle von Gleichheit. Es gilt

Satz (Brooks, 1941): Ist G ein zusammenhängender Graph, verschieden vom vollständigen Graph und ungeradem Zykel, dann gilt:

$$\chi(G) \le \Delta(G)$$

8.8 Def.: Ein Graph ist k-kritisch, falls gilt:

i) $\chi(G) = k$ und

ii) $\chi(G-v) = k-1 \quad \forall v \in V(G)$

8.9. Bem: 1) Beachte, dass Entfernen eines Knotens die chromatische Zahl nur um 1 erniedrigen kann.

2) Ist $\chi(G) = k$, dann enthält G einen k-kritischen Teilgraph: Entferne Knoten in G, welche χ nicht erniedrigen, solange wie möglich. Was übrigbleibt, ist ein k-kritischer Graph.

3) Es gibt keinen guten Algorithmus um k-kritische Teilgraphen zu finden.

8.10 Lemma: Ist H ein k-kritischer Graph, dann gilt $\delta(H) \geq k-1$

Beweis: Annahme: $d(x) < k-1$ für ein $x \in V(H)$

Nach Voraussetzung gilt $\chi(H-x) = k-1$, d.h. $H-x$ kann mit $k-1$ Farben gefärbt werden. Da $d(x) < k-1$, können nicht alle $k-1$ Farben unter Nachbarn von x auftauchen, färbe x mit solch einer fehlenden Farbe, zusammen mit der Färbung von $H-x$ gibt dies dann Färbung von H mit $k-1$ Farben. $\square$

8.11. Korollar: Ist $\chi(G) = k$, dann hat G mindestens k Knoten, welche mindesten Grad $k-1$ haben.

Beweis: $\chi(G) = k \Rightarrow \exists$ k-kritischen Teilgraphen H

$\chi(H) = k \Rightarrow |V(H)| \geq k$

$8.10 \Rightarrow \delta(H) \geq k-1$

$\Rightarrow$ Beh. gilt für H und damit auch für G. $\square$

8.12. Satz (Wilf 1967): Bezeichne $\lambda_{max}(G)$ den maximalen Eigenwert von G. Dann gilt

$$\chi(G) \leq 1 + \lambda_{max}(G)$$

<u>Beweis</u>: Für eine symmetrische Matrix gilt

$$\lambda_{max} = \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}$$

Betrachte $A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sei $A_0 x_0 = \lambda_{max}(A_0) \cdot x_0$

Setze $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\Rightarrow \|x\|^2 = \|x_0\|^2)$

$$\Rightarrow A x = \begin{pmatrix} A_0 x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_{max}(A_0) \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = \lambda_{max}(A_0)\, x$$

$$\Rightarrow \lambda_{max}(A) = \lambda_{max}(A_0)$$

Setze nun $k := \chi(G)$. Dann finden wir also einen k-kritischen Teilgraphen H von G und es gilt: $\lambda_{max}(H) \leq \lambda_{max}(G)$

Nun betrachte $A := A(H)$

$$\lambda_{max}(H) \geq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \quad \forall\, x \neq 0, \text{ also}$$

insb. für $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(v_1) \\ \vdots \\ d(v_n) \end{pmatrix} \qquad n = |V(H)|$$

$$\Rightarrow \langle A x_0, x_0 \rangle = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \geq n \cdot \delta(H)$$

$$\|x_0\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$$

$$\Rightarrow \lambda_{max}(G) \geq \lambda_{max}(H)$$

$$\geq \frac{\langle A x_0, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2}$$

$$\geq \frac{n \cdot \delta(H)}{n} = \delta(H) \geq k-1$$

$$= \chi(G) - 1$$

$$\Rightarrow \chi(G) \leq \lambda_{max}(G) + 1$$

<u>8.13. Beispiel</u>: Betrachte $G = K_{m,n}$. Dann gilt:

$\Delta(G) = \max(n,m)$

$\lambda_{max}(G) = \sqrt{n \cdot m}$

Somit haben wir:

8.6: $\quad \chi(G) \leq \max(n,m) + 1$

Brooks: $\quad \chi(G) \leq \max(n,m)$

Wilf: $\quad \chi(G) \leq \sqrt{n \cdot m} + 1$

Somit: Wilf ergibt wesentliche Verbesserung falls $n \ll m$.

Allerdings: es gilt hier $\chi(K_{n,m}) = 2$

<u>8.14. Notation</u>: Wir bezeichnen die Anzahl der zulässigen k-Färbungen eines Graphen G mit $p(G,k)$ (oder $p_G(k)$ or $\chi(G;k)$)

8.15. Beispiele: 1) $G = K_n$

k Möglichkeiten für 1. Knoten

$k-1$ — " — 2.

etc

$\Rightarrow p(K_n, k) = k \cdot (k-1)(k-2) \cdots (k-n+1)$

Insbesondere: $p(K_n, k) = 0$ falls $k < n$

2) $G =$ Baum mit n Knoten

Der Baum sprieße von fest gewählten Knoten ("Wurzel") zu den neuen Nachbarn

$\rightsquigarrow$ k Möglichkeiten für Wurzel

$k-1$ — " — alle anderen Knoten

$\Rightarrow p(T, k) = k(k-1)^{n-1}$

Beweis durch Induktion:

$n = 1$, $T = \circ$, $p(T, k) = k$ ✓

Betrachte nun Baum T mit n Knoten; sei v ein Blatt $\Rightarrow T' = T - v$ Baum mit $n-1$ Knoten

Färbung von T $\hat{=}$ Färbung von T' + Färbung von v

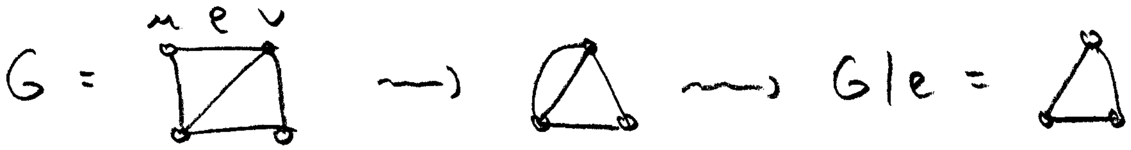
$\downarrow$ $k \cdot (k-1)^{n-2}$ Möglichkeiten (Ind. Vor.)

$\downarrow$ $k-1$ Möglichk

$\Rightarrow k \cdot (k-1)^{n-1}$ Färbungen für T

8.16. Notation: Sei G ein einfacher Graph. Die Kontraktion einer Kante e mit Endpunkten u, v besteht im Ersetzen von u und v durch einen einzigen Knoten mit einfallenden Kanten die einfallenden Kanten von u oder v (ohne e), d. h. wir "schrumpfen die Kante e zu einem einfachen Punkt". Mehrfachkanten werden entfernt. Die Kontraktion wird mit G/e bezeichnet.

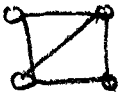
8.17. Beispiel:



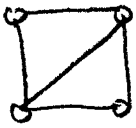
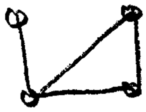
8.18. Satz (Chromatische Reduktion): Sei G ein einfacher Graph und e eine Kante von G, dann gilt:

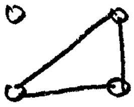
$$p(G;k) = p(G-e;k) - p(G/e;k)$$

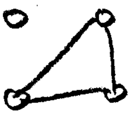
Beweis: Jede zulässige Färbung von G ist auch zulässige Färbung von $G-e$. Der Unterschied besteht in den zulässigen Färbungen von $G-e$, bei denen die Endpunkte von e die gleichen Farben haben; diese entsprechen jedoch den zulässigen Färbungen von G/e

8.19. Beispiel: G = kite 

Wir identifizieren $p(G,k)$ mit G:

 =  − 

 − 

=  − 2 

= $(k-2)$ 

= $(k-2)$ {  −  }

$\quad\quad\quad\quad = k(k-1)^2 \quad\quad = k(k-1)$

$$= (k-2)k(k-1)[k-1-1]$$
$$= k(k-1)(k-2)^2$$
$$= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k$$

Insbesondere: $p(G,k) = 0$ für $k = 1, 2$

$\neq 0$ für $k = 3$

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

8.20. Satz: $p(G,k)$ ist ein Polynom in k, mit Grad $n = |V(G)|$, mit ganzzahligen Koeffizienten, mit alternierendem Vorzeichen, ohne konstanten Term, der Form

$$p(G,k) = k^n - |E(G)|\, k^{n-1} + \ldots$$

Beweis: Induktion nach $|E(G)|$

$$|E(G)| = 0 \Rightarrow p(G;k) = k^n$$
$$= k^n - 0 \cdot k^{n-1} + 0 \checkmark$$

Ind. Schritt: Benutze

$$p(G;k) = p(G-e;k) - p(G|e;k)$$

und beachte, dass sowohl $G-e$ als auch $G|e$ weniger Kanten haben als G. Es gilt

$$|V(G-e)| = |V(G)| = n$$
$$|V(G|e)| = n-1$$

$$\overset{\text{Ind. Vor}}{\Longrightarrow} \quad p(G-e;k) = k^n - E(G-e)\, k^{n-1} \pm \ldots$$
$$p(G|e;k) = \qquad k^{n-1} \mp \ldots$$

$$\Rightarrow \quad p(G;k) = k^n - \underbrace{(|E(G-e)|+1)}_{|E(G)|} k^{n-1} \pm \ldots$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

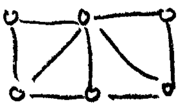
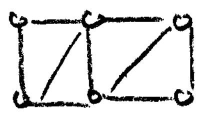
8.21. Notation: Das Polynom $p(G;k)$ heißt das *chromatische Polynom* von G. Meist benutzen wir λ (oder x) als Variable statt k: $p(G;\lambda)$ oder $p_G(\lambda)$

8.22. Bem.: 1) $p(G;\lambda)$ ist eine Invariante, d.h. $p_{G_1} = p_{G_2}$ falls G_1 und G_2 isomorph

2) p_G ist keine vollständige Invariante, d.h. $\exists$ nicht-isomorphe Graphen mit gleichem chromatischen Polynom. Solche heißen "chromatisch äquivalent".

Beispiele: a) alle Bäume mit n Vertizes haben gleiches chromatisches Polynom

$$p_T(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$$

b) $G_1 =$  $G_2 =$ 

sind nicht isomorph, aber

$$p_{G_1}(\lambda) = p_{G_2}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^4$$

3) Welche Information enthält p_G über den Graphen?

8.23. Satz: Ist $p_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$, dann ist G ein Baum

Beweis: Hat G Komponenten $G_1, \dots, G_r$, dann gilt:

$$p_G(\lambda) = p_{G_1}(\lambda) \dots p_{G_r}(\lambda)$$

Da $p_{G_i}(0) = 0$, haben wir $p_{G_i}(\lambda) = \lambda\, \tilde{p}_{G_i}(\lambda)$

$$\Rightarrow p_G(\lambda) = \lambda^r\, \tilde{p}_G(\lambda)$$

Da $p_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1} \Rightarrow r = 1$

d.h. G ist zshgd

$$p_G(\lambda) = \lambda^n - (n-1)\lambda^{n-1} \pm \dots$$

$$\Rightarrow |E(G)| = n-1$$

also: $\left.\begin{array}{l}\text{zushgd} \\ n \text{ Knoten} \\ n-1 \text{ Kanten}\end{array}\right\} \overset{6.7.}{\Rightarrow}$ Baum

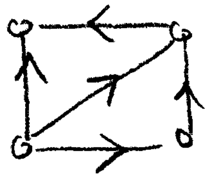
$\square$

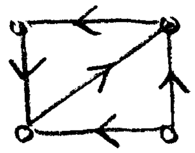
8.24. Bem.: Erstaunlicherweise hat auch $p_G(-1)$ eine Bedeutung, obwohl $k=-1$ für das Färben sinnlos ist, nämlich

$p_G(-1) = \pm$ Anzahl der azyklischen Orientierungen vom Graph (Stanley 1973)

Orientierung: Kanten bekommen Richtung

azyklische Orientierung: Orientierung ohne gerichtete Zykel

z.B.  ist azyklische Orientierung

 ist nicht azyklisch

Beispiel: C_n hat 2^n Orientierungen

2 davon sind nicht azyklisch

$\Rightarrow$ C_n hat $2^n - 2$ azyklische Orientierungen

Es gilt nun:

$$P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$$

(Beweis durch chrom. Red)

$$\Rightarrow P_{C_n}(-1) = (-2)^n + (-1)^n(-2)$$

$$= \begin{cases} 2^n - 2 & n \text{ gerade} \\ -(2^n - 2) & n \text{ ungerade} \end{cases}$$