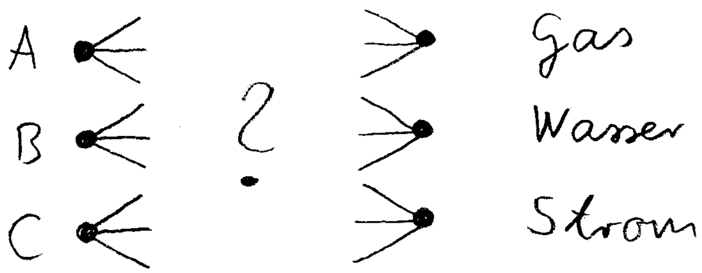
9. Ebene Graphen und der Vier-Farben-Satz

Knobelaufgabe



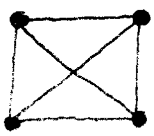
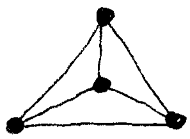
Kann dies gezeichnet werden, ohne dass sich die Kanten kreuzen?

Ist $K_{3,3}$ planar?

9.1. Def: Ein Graph heißt planar, falls er ohne Kreuzungen in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) gezeichnet werden kann. („planare Einbettung")

Ein ebener Graph ist die spezielle planare Einbettung eines planaren Graphen.

9.2. Beispiel:

$K_4 =$  ist planar, da er eine planare Einbettung  besitzt.

9.3. Notation: Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein ebener Graph. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus G$ heißen Flächen ("faces").

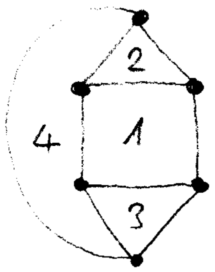
Es gibt genau eine unbeschränkte Fläche, die äußere Fläche.

9.4. Bemerkungen:

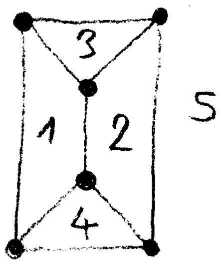
1) Zur genauen Behandlung planarer Einbettungen benötigt man einige Grundlagen aus der Topologie, wie etwa den Jordanschen Kurven-Satz:

   Jede geschlossene Kurve ohne Selbstüberschneidungen teilt die Ebene in genau zwei Gebiete, von denen jedes die Kurve als Rand hat.

2) Betrachte zwei ebene Einbettungen des gleichen Graphen:



und



$n = 6$
$e = 9$
$f = 5$

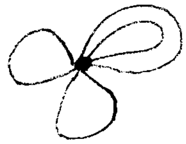
Die Zahl der Flächen ist gleich!

9.5. Satz (Eulersche Formel, 1758)

Sei G ein zusammenhängender, ebener Graph mit n Ecken, e Kanten und f Flächen. Dann gilt:

$$n - e + f = 2$$

<u>Beweis:</u> Induktion nach n!

<u>$n=1$:</u> Der Graph hat die Form .

- $e=0 \Rightarrow f=1$ ✓
- Durch Hinzufügen einer weiteren Schleife wird eine Fläche in zwei Flächen geteilt, d.h.

$$e \to e+1 \quad \Rightarrow \quad f \to f+1 \quad ✓$$

<u>Induktionsschritt $n-1 \to n$:</u>

G zusammenhängend

$\Rightarrow \exists$ Kante, die keine Schleife ist

Kontraktion dieser Kante (ohne mehrfache Kanten oder Schleifen zu entfernen)

$\rightsquigarrow$ $G' := G \setminus e$ ebener Graph mit

$$n' = n-1,\ e' = e-1 \text{ und } f' = f$$

nach Induktionsvoraussetzung: $n' - e' + f' = 2$

$$\Rightarrow \quad n - e + f = n' - e' + f' = 2$$

$\square$

<u>9.6. Bemerkung:</u> Ist G ein unzusammenhängender Graph, so gilt die Eulersche Formel für jede Komponente. Indem wir diese aufaddieren und die äußeren Flächen dabei

identifizieren, erhalten wir:
Für einen ebenen Graphen mit k Komponenten gilt:

$$n - e + f = 2k - (k-1) = k+1$$

<u>9.7. Satz:</u> Ist G ein einfacher, ebener Graph mit mindestens drei Ecken, dann ist

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6.$$

Falls G keine Dreiecke enthält, gilt

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4.$$

<u>Beweis:</u>

$$\left.\begin{array}{l}\text{Jede Fläche trägt } \geq 3 \text{ Kanten bei,}\\ \text{jede Kante gehört zu 2 Flächen.}\end{array}\right\} \Rightarrow 3f \leq 2e$$

Euler (Bem. 9.6.): $n - e + f = k+1 \geq 2$

$$\Rightarrow \quad e \leq n + f - 2 \leq n + \frac{2}{3}e - 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}e \leq n - 2$$

$$\Rightarrow \quad e \leq 3n - 6.$$

Falls G keine Dreiecke enthält, gilt $4f \leq 2e$.

$$\Rightarrow \quad e \leq n + \frac{1}{2}e - 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}e \leq n - 2$$

$$\Rightarrow \quad e \leq 2n - 4.$$

□

9.8. Korollar:

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

Beweis:

K_5: $n = 5$, $e = 10$

A: K_5 planar $\overset{9.7.}{\Longrightarrow}$ $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ $\lightning$

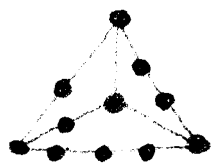
$K_{3,3}$: $n = 6$, $e = 9$, keine Dreiecke (ung. Zykel)

A: $K_{3,3}$ planar $\overset{9.7.}{\Longrightarrow}$ $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$ $\lightning$

$\square$

9.9. Bemerkung:

Ein Graph, der K_5 oder $K_{3,3}$ als Untergraph enthält, kann klarerweise nicht planar sein. Ferner haben auch Kantenunterteilungen keinen Einfluss auf die Planarität eines Graphen.

Unterteilung von K_4: 

Damit gilt: Besitzt G einen Untergraphen, der eine Kantenunterteilung von $K_{3,3}$ oder K_5 ist, dann ist G nicht planar.

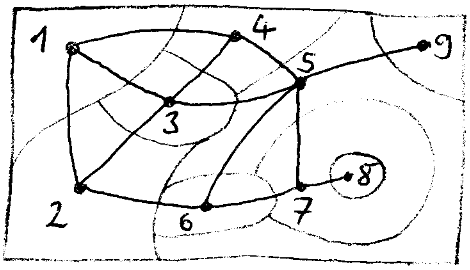
Es gilt sogar die folgende berühmte Umkehrung dieser Aussage:

Satz (Kuratowski, 1930):
Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Kantenunterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ als Untergraph enthält.

9.10. Bemerkung:

Färbung planarer Graphen $\hat{=}$ Färbung von Karten

Karte $\hat{=}$ duales Objekt zu einem planaren Graphen



Vier-Farben-Problem:

Kann jede Karte mit höchstens 4 Farben so gefärbt werden, dass benachbarte Länder verschiedene Farben haben?

ist äquivalent zu:

Hat jeder planare Graph eine zulässige 4-Färbung?

Geschichte des Problems:

1852: VFP gestellt in einem Brief an Hamilton (vermutlich von Francis Guthrie)

1878: offizielle Vorstellung durch Cayley vor der London Math Society

1879: „Beweis" durch Kempe

1890: Heawood findet einen Fehler im Beweis von Kempe, konnte ihn aber retten für einen Beweis des Fünf-Farben-Satzes

1976: Beweis des VFS durch Appel + Haken (+ Koch); beruht auf einem massiven Computereinsatz: 1000 Stunden Rechenzeit auf drei Computern im Jahr 1976

<u>9.11. Satz:</u> Jeder einfache planare Graph G enthält eine Ecke vom Grad höchstens 5, d. h. $\delta(G) \leq 5$.

<u>Beweis:</u> Falls nicht, dann: $\forall v : d(v) \geq 6$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\sum_v d(v)}_{\geq 6n} = 2e \quad \Longrightarrow \quad e \geq 3n$$

Nach 9.7. gilt aber: $e \leq 3n - 6$ $\lightning$ $\square$

<u>9.12. Sechs-Farben-Satz:</u> Jeder einfache planare Graph ist 6-färbbar.

Beweis: Induktion nach n!

Induktionsanfang: $n \leq 6$: klar!

$n-1 \longrightarrow n$: Sei G ein einfacher, planarer Graph mit n Ecken

$\overset{9.11.}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Ecke v mit $d(v) \leq 5$

Betrachte $G' := G \setminus v$ $\Longrightarrow$ $|V(G')| = n-1$, G' planar

$\overset{\text{Ind-Vor.}}{\Longrightarrow}$ G' ist 6-färbbar

v hat höchstens 5 Nachbarn. Färbe v also mit einer der Farben, die noch keiner seiner Nachbarn hat.

$\Longrightarrow$ G ist 6-färbbar. $\square$

9.13. Fünf-Farben-Satz:

Jeder einfache, planare Graph ist 5-färbbar.

Beweis: Induktion nach n!

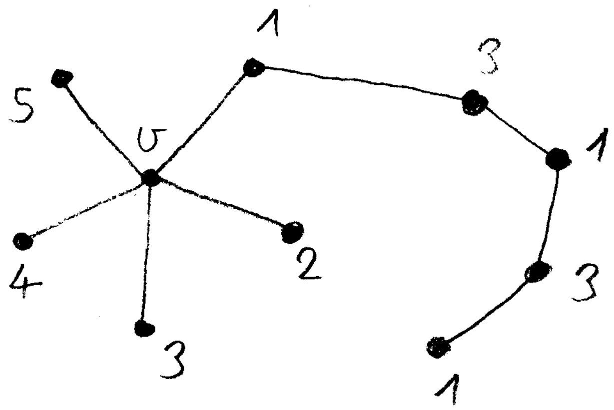
Induktionsanfang: $n \leq 5$ $\Longrightarrow$ 5-färbbar.

$n-1 \longrightarrow n$: Betrachte einen einfachen, planaren Graphen mit n Ecken.

$\overset{9.11.}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Ecke v mit $d(v) \leq 5$

$G' := G \setminus v$ ist 5-färbbar nach Ind.-Vor.

Es gibt nur dann ein Problem, wenn $d(v) = 5$ und alle Farben unter den Nachbarn auftreten.



Sei $G'_{i,j}$ der Untergraph von G', der von den Ecken mit den Farben i und j erzeugt wird ($G'_{i,j}$ besteht also aus allen Ecken mit den Farben i, j und allen Kanten von G', die diese verbinden).

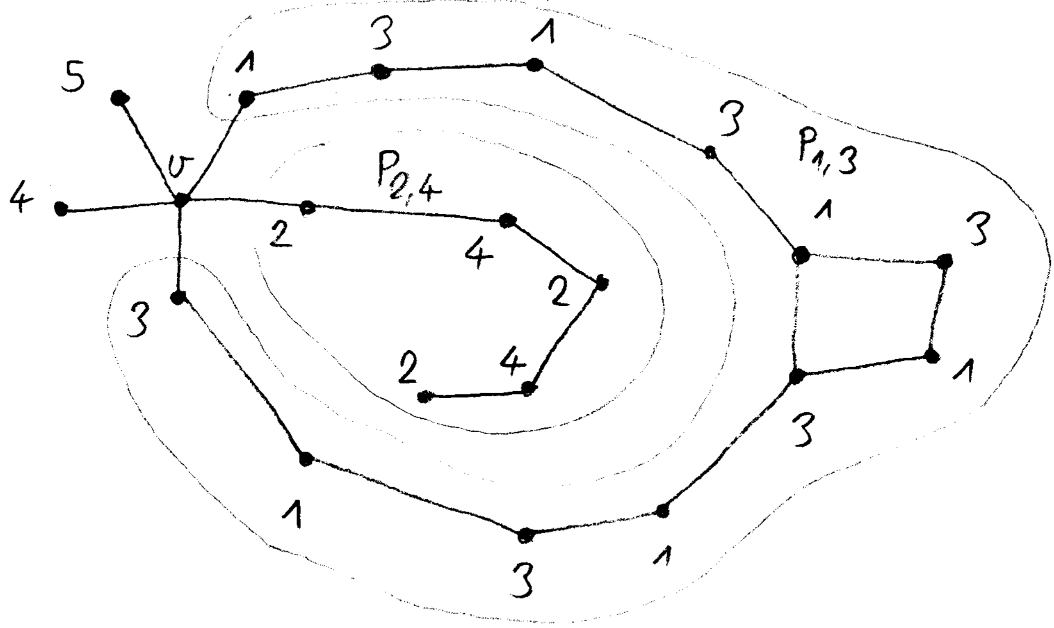
Auswechseln der Farben auf jeder Komponente von $G'_{i,j}$ gibt ebenfalls eine zulässige 5-Färbung.

Also: Falls eine solche Komponente nur eine zu v benachbarte Ecke enthält, können wir die Farben auf dieser Komponente auswechseln, um eine Farbe unter den Nachbarn zu entfernen.

Färbe v in dieser Farbe $\Longrightarrow$ 5-färbbar

Jedoch: Es könnte passieren, dass immer zwei Nachbarn von v durch solche Komponenten verbunden werden.

Betrachte etwa $P_{1,3}$:



⌢ Dann sind 2 und 4 aber getrennt. Eine mögliche Komponente $P_{2,4}$ zwischen ihnen müsste $P_{1,3}$ kreuzen, die Ecke im Schnitt hätte somit eine Farbe aus $\{1,3\} \cap \{2,4\} = \emptyset$. Es kann also keinen solchen Schnitt geben.

$\longrightarrow$ Wir können immer die Farben auf einer Komponente auswechseln, so dass eine Farbe in der Nachbarschaft von v frei wird. ⌢

$\square$

9.14. Bemerkung:

1) Falls ein Graph nicht planar ist, können wir uns fragen, wie weit er davon entfernt ist, planar zu sein. Zwei wichtige Größen sind:

(i) Zahl der Kreuzungen in einem Graphen = minimale Zahl der Kreuzungen in einer

(ii) <u>Geschlecht</u> eines Graphen

= minimales g, so dass sich der Graph in eine Fläche vom Geschlecht g einbetten lässt

2) Erinnerung: Jede kompakte orientierbare Fläche ist homeomorph zu einer Sphäre mit einer gewissen Zahl g von Henkeln. g nennen wir das <u>Geschlecht</u> der Fläche

$g = 0$:  Sphäre

$g = 1$:  $\hat{=}$  Torus

u. s. w.

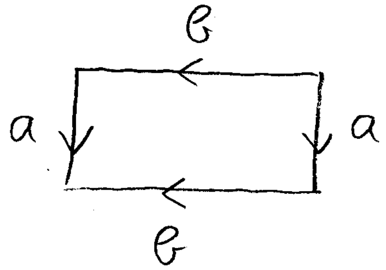
3) Jeder Graph kann auf einer Fläche von hinreichend hohem Geschlecht gezeichnet werden (nimm eine Zeichnung in der Ebene und „überbrücke" jede Kreuzung durch einen Henkel.

4) G planar $\hat{=}$ G kann in der Ebene gezeichnet werden

$\hat{=}$ G kann auf der Sphäre gezeichnet werden

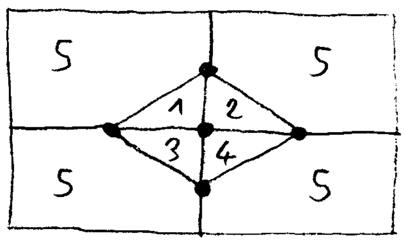
$\hat{=}$ G hat Geschlecht $g = 0$.

9.15. Beispiel: K_5 ist nicht planar, also $g > 0$. Man kann K_5 auf den Torus zeichnen, also gilt $g(K_5) = 1$.

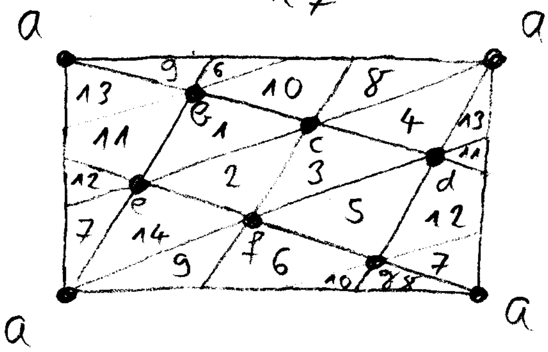
Beachte:  $\hat{=}$ 

Damit erhalten wir toroidale Einbettungen:

K_5



K_7



$n = 5$
$e = 10$
$f = 5$

$\Rightarrow n - e + f = 0 = 2(1-g)$

$n = 7$
$e = 21$
$f = 14$

$\Rightarrow n - e + f = 0$

9.16. Satz (Eulersche Formel für Geschlecht g):
Für jeden zusammenhängenden Graphen vom Geschlecht g gilt

$$n - e + f = 2(1-g)$$

9.17. Korollar: Jeder einfache zusammenhängende Graph vom Geschlecht g mit n Ecken hat höchstens $3(n-2+2g)$ Kanten.

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} 3f &\leq 2e \\ n-e+f &= 2(1-g) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} e &= n+f-2(1-g) \\ &\leq n + \tfrac{2}{3}e - 2(1-g) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}e \leq n - 2(1-g)$$

$$\Rightarrow e \leq 3(n-2+2g). \qquad \square$$

9.18. Korollar: Jeder einfache Graph vom Geschlecht g mit n Ecken hat mindestens eine Ecke vom Grad höchstens $\frac{6(n-2+2g)}{n}$.

Beweis: Es genügt, zusammenhängende einfache Graphen zu betrachten. Setze

$$\delta := \min_{v \in V(G)} d(v).$$

$$\Rightarrow n \cdot \delta \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e \leq 2 \cdot 3(n-2+2g)$$

$$\Rightarrow \delta \leq 6\,\frac{n-2+2g}{n}. \qquad \square$$

Wie viele Farben reichen bei einem einfachen Graphen vom Geschlecht g aus?

Falls wir immer eine Ecke vom Grad $c-1$ finden können, dann reichen c Farben aus (nach Induktion, wie im Sechs-Farben-Satz für $g=0$).

Daher fordern wir für $g \geq 1$, dass

$$\frac{6(n-2+2g)}{n} = 6 + \frac{12(g-1)}{n} \leq c-1 \quad \forall n \geq c$$

(für $n < c$ gibt es klarerweise Ecken vom Grad $\leq c-1$)

Der optimale Wert für c ist daher gegeben durch

$$6 + \frac{12(g-1)}{n} = c-1, \text{ d. h. } c = \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2}.$$

9.19. Satz (Heawood, 1890):

Hat G Geschlecht $g \geq 1$, dann gilt

$$\chi(G) \leq \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2}.$$

Beweis: Setze $c := \dfrac{7+\sqrt{1+48g}}{2}$.

Wir müssen zeigen:

$$\delta(G) \leq c-1 \quad \forall G: \text{einfacher Graph, Geschlecht } g$$

Klar, falls $n \leq c$. Betrachte also $n > c$

nach 9.18.:
$$\delta \leq 6 + \frac{12(g-1)}{n}$$
$$\leq 6 + \frac{12(g-1)}{c} \quad (\text{da } g \geq 1)$$
$$= c-1$$

$\square$

9.20. Bemerkungen:

1) Beachte, dass die Formel in 9.19 für $g = 0$ die Abschätzung $\chi(G) \leq 4$ liefert. Der Beweis

funktioniert in diesem Fall aber nicht.
(Die Version für $g = 0$ liefert lediglich $\chi(G) \leq 6$)

2) Für $g \geq 1$ ist 9.19 im Gegensatz zum Sechs-Farben-Satz scharf, d.h. es gibt Graphen vom Geschlecht g, für die man $\left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} \right\rfloor$ Farben benötigt.
($\lfloor x \rfloor$ = größte ganze Zahl $n \leq x$)

Beispiel: $g = 1 \Rightarrow \frac{7+\sqrt{1+48g}}{2} = 7$

$\Rightarrow \chi(G) \leq 7$ für $g = 1$.

Jedoch: $\chi(K_7) = 7$ und $g(K_7) = 1$

Also: Sieben-Farben-Satz ist optimal für den Torus.

Um zu zeigen, dass die Heawood-Schranke optimal ist, muss man das Geschlecht von K_n allgemein kennen. Dies wurde zwar von Heawood vermutet, aber erst viel später durch Ringel + Youngs (1968) bewiesen:

$$g(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil \qquad (n \geq 3)$$

($\lceil x \rceil$ = kleinste ganze Zahl $n \geq x$)

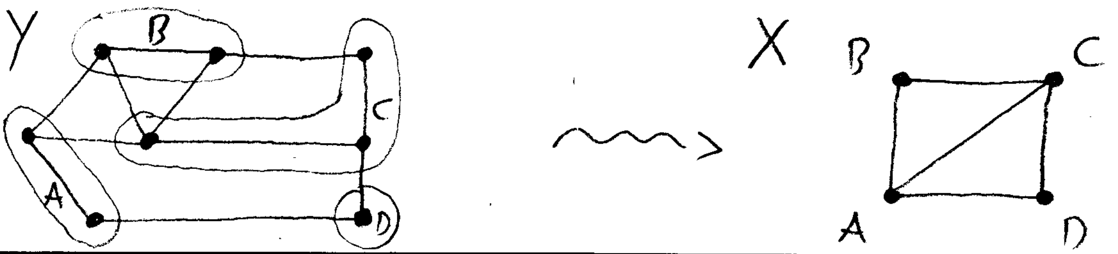
9.21. Bemerkungen:

1) Es gibt Algorithmen, die polynomial in der Größe sind, mit denen man Graphen auf Planarität überprüfen kann (und die ggf. auch eine ebene Einbettung liefern).
Planarität zu entscheiden ist daher EASY.
Es gibt jedoch keine guten Algorithmen, mit denen man das Geschlecht eines gegebenen Graphen bestimmen kann. Dies ist NP-HARD.

2) Beachte, dass auch das Prüfen eines Graphen auf 3-Färbbarkeit NP-HARD ist (wohingegen die 4-Färbbarkeit nach dem VFS EASY ist)

3) Frage: Gibt es eine Charakterisierung wie im Satz von Kuratowski auch für Graphen höheren Geschlechts?

<u>Def</u>: Ein Graph H ist ein <u>Minor</u> eines Graphen G, falls H aus G durch Entfernen und/oder Kontrahieren von Kanten hervorgeht.
(Minor = „Kontraktionen von Untergraphen")



X ist Minor von Y

Eine Folgerung aus dem Satz von Kuratowski ist:

<u>Satz</u> (Wagner, 1937): G ist genau dann planar, wenn weder K_5 noch $K_{3,3}$ ein Minor von G ist.

Einer der tiefsten Sätze der Graphentheorie ist der

<u>Minoren-Satz</u> (Robertson-Seymour, 1986-1997)
In jeder unendlichen Liste von Graphen findet man einen Graphen, der ein Minor eines anderen Graphen der Liste ist.

Daraus ergibt sich:

<u>Korollar</u>: Für jedes g gibt es eine endliche Liste von Graphen $\mathcal{G} = \{G_1, \ldots, G_r\}$, so dass

G hat Geschlecht g

$\Longleftrightarrow$ kein Element von $\mathcal{G}$ ist ein Minor von G.

<u>Für $g = 0$</u>: $\quad \mathcal{G} = \{K_3, K_{5,5}\}$

<u>Jedoch</u>: Für andere g ist keine explizite, vollständige Liste bekannt.

(für $g = 1$ sind beispielsweise mehr als 800 minimale verbotene Minoren bekannt!)