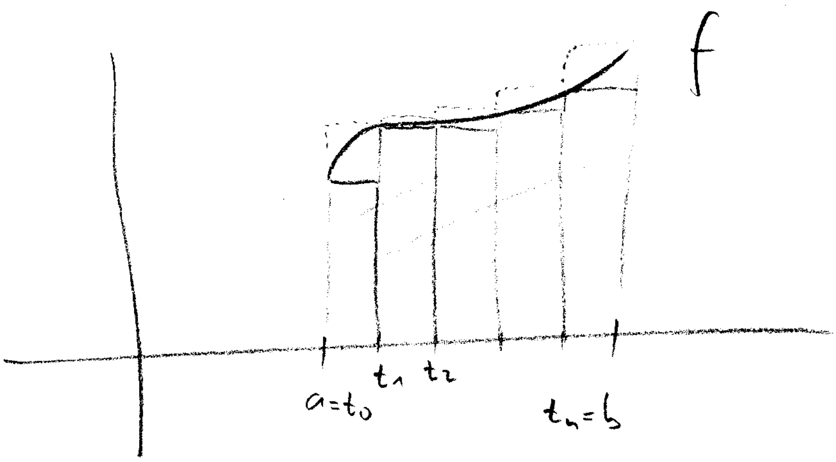
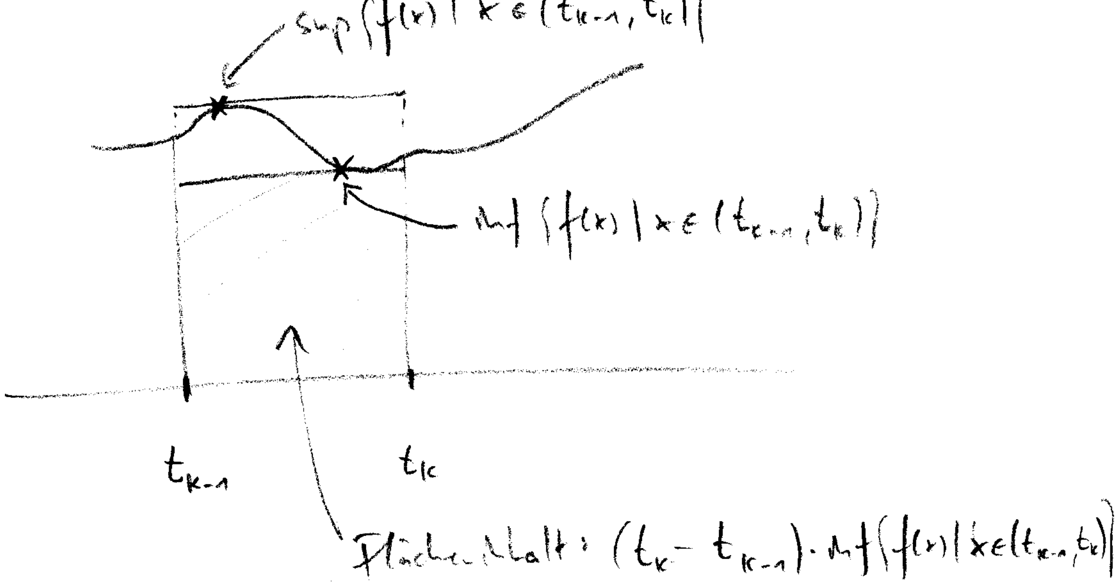
§ 8 Integration

Die Integralrechnung ist das Gegenstück zur Differentialrechnung, wie wir im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sehen werden. Ziel ist es, den Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x-Achse zu bestimmen. Das bewerkstelligt man mit „unendlich feinen Summen". Insofern ist das Integral nichts anderes als der Limes solcher Summen (daher auch das Symbol $\int_a$ für „S", Summe)



schöpfe den Flächeninhalt durch Blöcke unterhalb des Graphen aus, genauso oberhalb. Ist die Unterteilung von $[a,b]$ fein genug, so nähert sich das dem Wert des Flächeninhalts an

Vergrößerung:



8.1 Definition:

(a) Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge und ist diese nach oben beschränkt (gibt es also eine Zahl $M > 0$, so dass $x \leq M$ ist für alle $x \in A$), so bezeichnet man mit dem Supremum $\sup A \in \mathbb{R}$ die kleinste obere Schranke von A. Es gilt also

(1) $x \leq \sup A$ für alle $x \in A$

(2) Ist $M \in \mathbb{R}$ mit $x \leq M$ für alle $x \in A$, so ist $\sup A \leq M$.

(b) Ist entsprechend A nach unten beschränkt ($x \geq m$ für alle $x \in A$), so ist das Infimum $\inf A \in \mathbb{R}$ die größte untere Schranke von A mit

(1) $x \geq \inf A$ für alle $x \in A$

(2) Ist $m \in \mathbb{R}$ mit $x \geq m$ für alle $x \in A$, dann $m \leq \inf A$.

(c) Ist A nach oben unbeschränkt, so setzen wir $\sup A = \infty$, entsprechend $\inf A = -\infty$, falls A nach unten unbeschränkt ist. Ist $\inf A \in A$, so ist das Infimum sogar ein Minimum ($\min A \in \mathbb{R}$), ist $\sup A \in A$, so ist das Supremum ein Maximum. ($\max A \in \mathbb{R}$)

Bsp:
- $\inf (-1, 2] = -1$, kein Minimum, $\sup(-1,2] = \max(-1,2] = 2$
- $\inf \mathbb{N}_0 = \min \mathbb{N}_0 = 0$, $\sup \mathbb{N}_0 = \infty$ ($\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$)

8.2 Definition: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ~~eine~~ beschränkte Funktion (gibt es also $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \le f(x) \le M$ für alle $x\in[a,b]$), so heißt

- $a=t_0<t_1<\dots<t_{n-1}<t_n=b$ eine Zerlegung von $[a,b]$
- $\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})\cdot\inf\{f(x)\mid x\in(t_{k-1},t_k)\}$ Untersumme
- $\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})\cdot\sup\{f(x)\mid x\in(t_{k-1},t_k)\}$ Obersumme

bezüglich dieser Zerlegung

f heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$\inf\{\text{Obersumme bzgl. einer Zerlegung von } [a,b]\}$

$= \sup\{\text{Untersumme bzgl. einer Zerlegung von } [a,b]\}$ gilt,

falls sich also die Obersummen bzgl. immer feineren Zerlegungen genau den Untersummen annähern. Dieser Wert wird dann mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet.

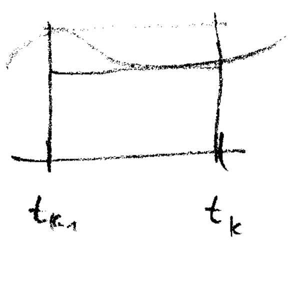
8.3 Satz: Jede stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist integrierbar und für die äquidistante Zerlegung $t_k = a+\frac{k(b-a)}{n}$, $k=0,\dots n$ ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(t_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(t_k)$$

Idee hierbei: Die Abstände zwischen den t_k sind immer gleich:

$$(t_k-t_{k-1}) = \left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)-\left(a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}\right) = \frac{b-a}{n}$$

und statt $\inf\{f(x)\mid x\in(t_{k-1},t_k)\}$ wähle einfach $f(t_{k-1})$ oder $f(t_k)$. Für die Blöcke



kann nämlich sogar ein beliebiger Wert $f(s)$ mit $t_{k-1}\le s\le t_k$ ausgewählt werden.

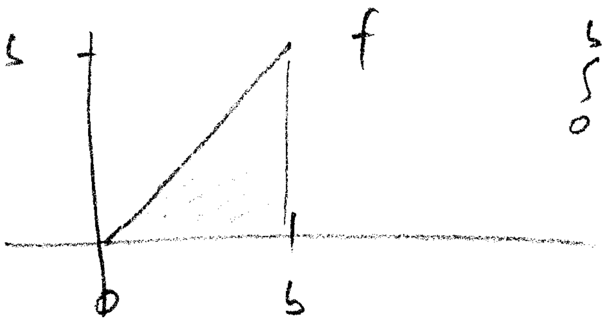
Bsp.: Betrachte $f:[0,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$. Da f stetig ist, ist f auch integrierbar und wir berechnen:

$$\int_0^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b}{n}\cdot\left(\frac{kb}{n}\right) \qquad \left(\text{denn } t_k = 0+\frac{k(b-0)}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \qquad (\text{wie in Blatt 7, A4})$$

$$= \frac{b^2}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{b^2}{2}$$



$\int_0^b f(x)\,dx = \frac{b^2}{2}$ ist tatsächlich der Flächeninhalt des Dreiecks mit Seitenlänge b und Höhe b.

8.4 <u>Definition</u>: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, und $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit $F'=f$, so heißt F <u>Stammfunktion</u> von f.

(Diff.- und Integrationsrechn. also inverse zueinander)

8.5 <u>Hauptsatz der Differential und Integralrechnung</u>:

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, so ist $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ gegeben durch $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f.

Ist andererseits $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ irgendeine Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$.

<u>Bsp</u>: $\int_1^5 \frac{1}{x^2}\,dx = ?$ $G(x)=-\frac{1}{x}$ erfüllt $G'=f$ für $f(x)=\frac{1}{x^2}$,

also $\int_1^5 \frac{1}{x^2}\,dx = G(5)-G(1) = -\frac{1}{5}+1 = \frac{4}{5}$

8.6 Rechenregeln: (a) Monotonie. Sind $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar und ist $f(x)\le g(x)$ für alle $x\in[a,b]$, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

(b) Linearität. Sind $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, so ist
$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$
für $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Ist $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ integrierbar und $b\in[a,c]$, so gilt
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \qquad \left(\text{wir setzen } \int_a^a f(x)\,dx = 0\right)$$

8.7 Beispiele: (a) Ist $f(x)=c$ konstant, so ist $\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$ für ein $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ Stammfkt.

(c) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$. Dann $F(x)=\log|x|$ eine Stammfunktion.

(d) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^n}$, $n\ge 2$. Dann $F(x)=\frac{1}{1-n}\frac{1}{x^{n-1}}$.

allgemeiner: $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^\alpha$ mit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Dann $F(x)=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
Für $\alpha=\frac{1}{2}$ also $f(x)=\sqrt{x}$ und $F(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

(e) $f(x)=\sin x$, dann $F(x)=-\cos(x)$, $g(x)=\cos x$, dann $G(x)=\sin x$, $h(x)=\exp(x)$, dann $H(x)=\exp(x)$

8.8 Bemerkung: Schreibt man $F=\int f(x)\,dx$, so soll das heißen, dass F eine Stammfunktion von f ist. Ist diese eindeutig? Ja, bis auf eine Konstante: Ist F eine Stammfunktion von $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, so ist auch $G(x):=F(x)+c$ eine Stammfunktion ($G'=F'=f$). Sind umgekehrt F,G Stammfunktionen von f, so gilt $F(x)-G(x)=c$ für alle $x\in[a,b]$.

Bsp: - Nicht nur $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ ist eine Stammfkt. für $f(x)=x$, sondern auch $G(x)=\frac{1}{2}x^2+7$. Also $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2$, aber auch $\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+7$.

8.9 partielle Integration: Sind $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = \underbrace{[f(t)g(t)]_a^b}_{= f(b)g(b)-f(a)g(a)} - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$$

Idee: Umkehrung der Produktregel. $(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$.

Dann $\int_a^b (f(t)g(t))'\,dt = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$

$= f(b)g(b) - f(a)g(a)$, da $\Rightarrow F(x) = f(x)g(x)$ gilt: $F'(x) = (f(x)g(x))'$

Bsp:
- $\int_0^2 xe^x\,dx = ?$ Setze $f'(x)=e^x$, $g(x)=x$. Dann
  $\int_0^2 xe^x\,dx = [e^x\cdot x]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - (e^2-1) = e^2+1$
- $\int \log(x)\,dx = ?$ Setze $f'(x)=1$, $g(x)=\log(x)$. Dann
  $\int \log(t)\,dt = x\log(x) - \int t\cdot\frac{1}{t}\,dt = x\log(x) - \int 1\,dt = x\log x - x$
- $\int (\sin(t))^2\,dt = ?$ $f'(x)=\sin(x)$, $g(x)=\sin(x)$. Dann
  $\int \sin^2 t\,dt = -\cos(x)\sin(x) - \int \cos(t)\cdot(-\cos(t))\,dt$
  $= -\sin(x)\cos(x) + \int (1-\sin^2 t)\,dt$ $\quad(\sin^2 t + \cos^2 t = 1)$
  $= -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2 t\,dt$

  Also $2\int \sin^2 t\,dt = -\sin(x)\cos(x) + x$

  und somit $\int \sin^2 t\,dt = -\frac{1}{2}\sin(x)\cos x + \frac{1}{2}x$

8.10 Substitution: Ist $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ stetig und $u:[a,b]\to[c,d]$ differenzierbar mit stetiger Ableitung, so gilt

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\,dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,dx$$

(Ist $u(a)>u(b)$, so benutzen wir $\int_a^b h(t)dt = -\int_b^a h(t)dt$)

Bspe:

- $\int_a^b t e^{t^2} dt = ?$ Gute Idee ist $u(t)=t^2$ mit $u'(t)=2t$.

  Dann sollte f also $f(t)=\frac{1}{2}e^t$ sein und also
  $$\int_a^b t e^{t^2} dt = \int_a^b (\tfrac{1}{2}e^{t^2})\cdot 2t\,dt = \tfrac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} e^t\,dt = \tfrac{1}{2}(e^{b^2}-e^{a^2})$$

- $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = ?$ Idee: Hätte man hier $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$, so wäre das Integral per $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ lösbar.

  Versuche also $u(t)=t-1$ und $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ und erhalte
  $$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_{u(2)}^{u(4)} f(x)dx = \int_2^4 f(u(t))u'(t)\,dt = \int_2^4 \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt$$
  $$= \int_2^4 \underbrace{\sqrt{t}}_{=t^{\frac{1}{2}}}dt - \int_2^4 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}}}_{=t^{-\frac{1}{2}}}dt \overset{8.7}{=} \left[\frac{1}{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}\right]_2^4$$
  $$= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t}\right]_2^4$$

8.11 <u>uneigentliche Integrale</u>: (a) Wie können wir Funktionen $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ integrieren? Bisher ist nur $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ möglich.

Wir sagen, dass $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ <u>(uneigentlich) integrierbar</u> ist, falls der Grenzwert $\lim\limits_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$ existiert.

(Erinnerung: Für <u>jede</u> Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n\to\infty$ muss der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{x_n} f(x)\,dx$ existieren und muss immer den gleichen Wert ergeben, unabhängig von der Wahl der Folge)

Wir schreiben dann $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$

und entsprechend $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ für $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$.

<u>Bsp:</u> $\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^R = 1-\frac{1}{R} \longrightarrow 1$ für $R\to\infty$.

Also existiert $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

(b) Ist $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ an der Stelle $x=b$ nicht definiert, so können wir analog $\int_a^b f(x)\,dx := \lim\limits_{r\nearrow b}\int_a^r f(x)\,dx$ definieren, falls der Grenzwert $\lim\limits_{r\nearrow b}\int_a^r f(x)\,dx$ existiert.

<u>Bsp:</u> $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Da $\int_r^1 f(x)\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_r^1 = 2-2\sqrt{r}\to 2$, für $r\to 0$

ist $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim\limits_{r\searrow 0}\int_r^1 f(x)\,dx = 2$

(c) Sind <u>beide</u> Grenzen kritisch, dann teilen wir das Integral auf, also bspw. für $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{r\to-\infty}\arctan(x)\Big|_r^0 + \lim_{R\to\infty}\arctan(x)\Big|_0^R = \pi$$