Die quadratische Gleichung

letztes Mal: lineare Gleichung, aber viele Variablen
heute: quadr. Gl., eine Variable

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (*)$$

$p, q \in \mathbb{R}$ Koeffizienten, gegeben, x Unbestimmte, Variable, gesucht

Suchen $x \in \mathbb{R}$ so dass $(*)$ gilt

p-q-Formel

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

!

Was heißt das genau?

1. Fall: $\frac{p^2}{4} - q < 0 \Rightarrow$ Es gibt keine Lösung $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{-1} = ??$$

2. Fall: $\frac{p^2}{4} - q = 0 \Rightarrow$ Es gibt genau eine Lösung

$$x = -\frac{p}{2}$$

3. Fall: $\underbrace{\frac{p^2}{4} - q}_{\text{Diskriminante der Gleichung}} > 0 \Rightarrow$ Es gibt genau zwei Lösungen

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Herleitung:

$$x^2+px+q=0$$

$$\iff x^2+px = -q \qquad \Big| +\frac{p^2}{4}$$ quadratische Ergänzung

$$\iff x^2+px+\frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4}-q$$

$$x^2+px+\frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

⚠ Eine Quadratzahl ist immer positiv.

Falls $\frac{p^2}{4}-q<0 \Rightarrow$ keine Lösung.

Sonst:

$$\iff x+\frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$\iff x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

<u>Beispiele:</u>

1) $$x^2+x-6=0$$

$$p=1,\ q=-6$$

$$\frac{p^2}{4}-q = \frac{1}{4}+6 = \frac{25}{4} > 0$$

$\Rightarrow$ 2 Lösungen: $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$x = -\frac{1}{2}+\frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ und $x = -\frac{1}{2}-\frac{5}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

Test?

2) $x^2 - 10x + 25 = 0$

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{100}{4} - 25 = 0$$

$\Rightarrow$ 1 Lösung: $x = -\frac{p}{2} = 5$

Test: $(x-5)^2 = \ldots$

3) $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{4}{4} - 2 = -1$$

$\Rightarrow$ keine Lösungen

abc-Formel

Jetzt: $ax^2 + bx + c = 0$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben, $a \neq 0$. sonst ist es keine quadr. Gleichung.

Teile durch a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

also $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$

~~Diskriminante:~~ $\cancel{\frac{p^2}{4} - q = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$

~~oder (nach $\cdot 4a^2$)~~ $\cancel{b^2 - 4ac}$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ca}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ca}}{2a}$$

~~2 Lösungen~~ ~~$\Leftrightarrow b^2 - 4ca > 0$~~

~~1 Lösung~~ ~~$\Leftrightarrow \qquad = 0$~~

~~keine Lösung~~ ~~$\Leftrightarrow \qquad < 0$~~

Bsp: $2x^2 + 5x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{25}{4 \cdot 4} - \frac{3}{2} = \frac{25-24}{16} = \frac{1}{16} > 0$$

$\Rightarrow$ 2 Lösungen: $x = -\frac{5}{2 \cdot 2} \pm \frac{1}{4}$

$$x = -\frac{4}{4} = -1 \text{ und } x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

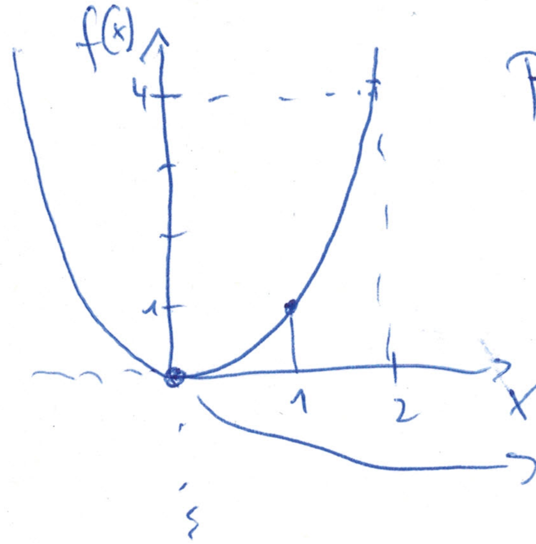
geometrische Bedeutung

$$f(x) = x^2 + px + q$$

ist Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Graph?

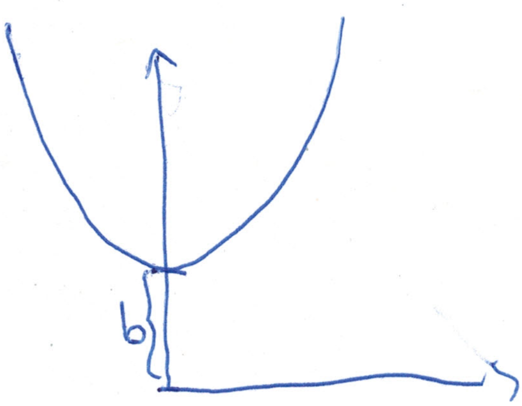
$f(x)=x^2$



Parabel

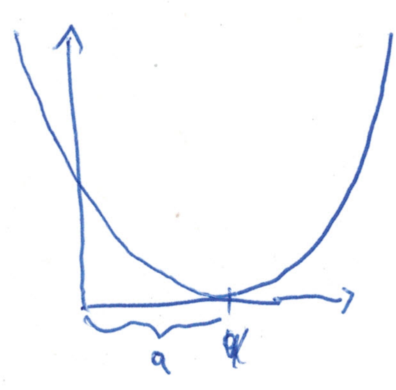
Scheitelpunkt

$f(x) = x^2 + b$



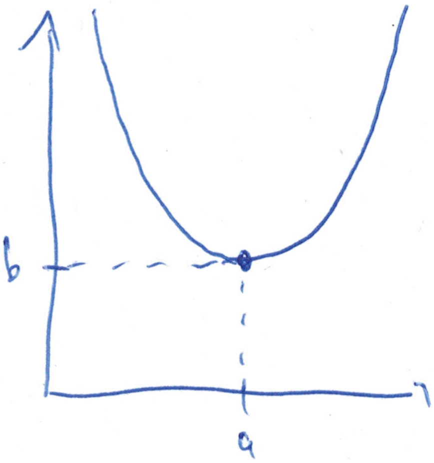
Verschieben um b nach oben/unten.

$f(x) = (x-a)^2$



Verschieben um b nach rechts/links

$f(x) = (x-a)^2 + b$



$f(x) = x^2 + px + q$ quadr. Ergänzung

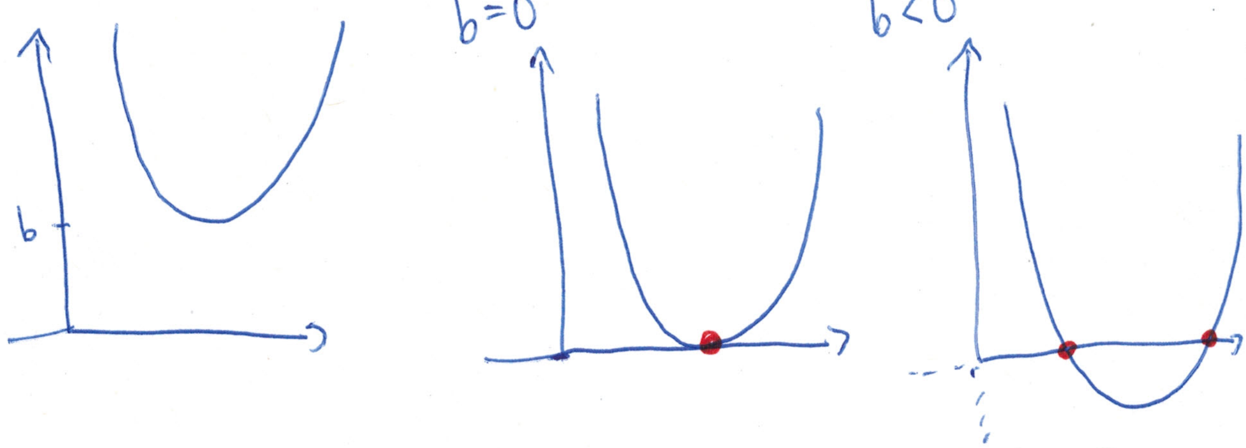
$= x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$

$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$

Also $a = -\frac{p}{2}$, $b = q - \frac{p^2}{4}$

$f(x) = 0 \iff$ Schnittpunkte des Graphen mit x-Achse.

$b > 0$ $b = 0$ $b < 0$



keine 1 2

Schnittpunkte.

Tricks für höheren Grad

A

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$$

Es gibt eine Lösungsformel für Grad 3, aber recht kompliziert.

Hier besser:

1. **Lösung raten!**

z.B. $x = 1$ $1 + 1 - 10 + 8 = 0$

2. Faktorisieren (nächstes Mal)

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x-1)\,\cancel{(x^2 + \ldots x + 9)}$$
$$(x^2 + 2x - 8)$$

Polynomdivision: nächstes Mal!

3. $\cancel{x^2 + 2x - 8 = 0}$ Faktor lösen

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\frac{p^2}{4} - q = 1 + 8 = 9$$

$$x = -1 \pm 3 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}$$

B $\quad 8x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

⚠ keine Terme mit x^3 und x !!

1. Neue Variable $y = x^2$. Nach y lösen.

$$8y^2 - 6y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - \frac{3}{4}y + \frac{1}{8} = 0$$

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{9}{4 \cdot 16} - \frac{1}{8} = \frac{9-8}{4^3} = \frac{1}{4^3} > 0$$

$$y = \frac{3}{8} \pm \frac{1}{2^3} \Rightarrow y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ und } y = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

2. In x umrechnen

$$x = \pm\sqrt{y}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$x = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$x = +\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ <u>4 Lösungen</u>