Polynomdivision / Faktorisieren

③

letztes Mal:

$$x^3+x^2-10x+8=0 \quad \text{lösen}$$

Trick: 1. Nullstellen raten: $x=1$

2. Schreibe $x^3+x^2-10x+8=(x-1)(x^2+px+q)$

3. p-q-Formel

Frage: Wie finde ich die richtigen p, q?

Polynomdivision

$$(\boxed{x^3}+x^2-10x+8):(x-1)=x^2+2x-8$$

$$-(x^3-x^2)$$

$$\cancel{0}\ \boxed{-2x^2}-10x+8$$

$$-(+2x^2-2x)$$

$$\cancel{0}\ \boxed{-8x}+8$$

$$-(8x-8)$$

$$0$$

$$\frac{x^3}{x} \qquad \frac{-2x^2}{x} \qquad \frac{-8x}{x}$$

$$\Rightarrow\ x^3+x^2-10x+8=(x-1)(x^2+2x-8)$$

$$=\underbrace{(x-1)(x-2)(x+4)}_{\text{Faktorisierung}}$$

$$x=-1\pm\sqrt{9}$$
$$=2,-4$$

Frage: Was passiert, wenn wir versuchen, durch $x+1$ zu teilen?

$$
\begin{array}{l}
(x^3+x^2-10x+8):(x+1)=x^2-10 \\
-(x^3+x^2) \\
\hline
\qquad -10x+8 \\
\qquad -(-10x-10) \\
\hline
\qquad\qquad +18
\end{array}
$$

Antwort: Es bleibt ein Rest

$$x^3+x^2-10x+8=(x^2-10)(x+1)+18$$

Analogie: ganze Zahlen

1) $7:3=2$ Rest 1

$\Leftrightarrow 7=2\cdot 3+1$

2) $9:3=3$ Rest 0

Rest $0 \Leftrightarrow 3$ teilt 9

jetzt allgemein:

<u>Polynom</u> $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

<u>vom Grad n</u> mit $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$, x Variable.

$$a_n \neq 0$$

<u>Satz</u> (Polynomdivision). Sei F Polynom vom Grad n, G Polynom vom Grad m mit $n \geq m > 0$. Dann existieren Polynome H vom Grad $n-m$ und R vom Grad kleiner als m mit

$$F = H \cdot G + R.$$

Man sagt: „f geteilt g ergibt h mit Rest r."

~~<u>Analogie</u>: $a, b \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen~~

~~7 geteilt 3 ergibt 2 mit Rest 1~~

$$\cancel{7 = 2 \cdot 3 + 1}$$

~~Beweis~~ des <u>Spezialfall</u>: Falls Rest $R = 0$ (das Nullpolynom)

so gilt $F = H \cdot G$

„Man sagt: G teilt F"

Beispiel: $F = a_n x^n + \dots + a_0$

$G = \cancel{1}x - b\,,\ b \in \mathbb{R}$ Grad 1

Dann ist R vom Grad kleiner 1, also 0.

$\Rightarrow R = r \in \mathbb{R}$ ist konstant.

$\Rightarrow F = H \cdot (x-b) + r$

Es gilt: b ist Nullstelle von F
(also $F(b) = 0$)

$\Updownarrow$

$r = 0 \iff G = \cancel{1}x - b$ teilt F

Beweis des Satzes (und Methode zum Finden von h und r):

$$f = a_n x^n + \ldots + a_0 \,, \quad g = b_m x^m + \ldots + b_0$$

$$a_n \neq 0 \neq b_m$$

$$(a_n x^n + \ldots + a_0) : (b_m x^m + \ldots + b_0) = \boxed{\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{c_{n-1}}{b_m} x^{n-m-1} + \ldots + \frac{e_m}{b_m}} =: H$$

$$-\left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot g\right)$$

$$c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0$$

(n-m)-mal Wiederholen

$$-\left(\frac{c_{n-1}}{b_m} \cdot g\right)$$

$$d_{n-2} x^{n-2} + \ldots + d_0$$

$$\vdots$$

$$e_m x^m + \ldots + e_0$$

$$-\left(\frac{e_m}{b_m} g\right)$$

$$\boxed{f_{m-1} x^{m-1} + \ldots + f_0} =: R$$

Beispiele:

1) Faktorisieren Sie das Polynom $F = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$!

(schreiben als $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$)

1. Nullstelle raten: $x = 1$ $\rightsquigarrow$ liefert Faktor $(x-1)$

2. Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad -x^2 - 5x + 6 \\
\quad \underline{-(-x^2 + 1x)} \\
\qquad -6x + 6 \\
\qquad \underline{-(-6x + 6)} \\
\qquad\qquad 0 \quad \text{Rest} = 0.
\end{array}
$$

$$x^2 = \frac{x^3}{x}, \quad -x = \frac{-x^2}{x}, \quad -6 = \frac{-6x}{x}$$

3. p-q-Formel für $x^2 - x - 6$

$\Rightarrow x = -2, 3$ $\qquad = (x+2)(x-3)$

Ergebnis: $F = (x-1)(x+2)(x-3)$

2) Faktorisieren Sie $F = x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24$.

Raten: $x = 2$ ist Nullstelle.

$$(x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24) : (x-2) = \underbrace{\underset{\overset{\shortparallel}{x^4/x}}{x^3} + 3x^2 + 4x + 12}_{G}$$

$$-(x^4 - 2x^3)$$

$$3x^3 - 2x^2 + 4x - 24$$

$$-(3x^3 - 6x^2)$$

$$4x^2 + 4x - 24$$

$$-(4x^2 - 8x)$$

$$12x - 24$$

$$-(12x - 24)$$

$$0$$

Wieder raten: $x = -3$ ist Nullstelle von G

$$(x^3 + 3x^2 + 4x + 12) : (x+3) = x^2 + 4$$

$$-(x^3 + 3x^2)$$

$$4x + 12$$

$$-(4x + 12)$$

$$0$$

$x^2 + 4$ hat keine (reellen) Nullstellen
$\Rightarrow$ lässt sich nicht weiter zerlegen

$$\Rightarrow F = (x-2)(x+3)(x^2+4)$$

Frage: Wie viele Nullstellen besitzt ein Polynom F vom Grad n höchstens?

Antwort: n, denn seien $b_1, \dots, b_r$ NS, dann teilt $(x-b_1)\cdots(x-b_r)$ das Polynom F

7

3) Teile $F = x^5 - x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 10x + 3$
mit Rest durch $G = x^2 + 3x + 2$.

$$(x^5 - x^4 - 12x^3 - 11x^2 + 10x + 3) : (x^2 + 3x + 2) = x^3 - 4x^2 - 2x + 3$$

$$-(x^5 + 3x^4 + 2x^3)$$

$$-4x^4 - 14x^3 - 11x^2$$

$$-(-4x^4 - 12x^3 - 8x^2)$$

$$-2x^3 - 3x^2 + 10x$$

$$-(-2x^3 - 6x^2 - 4x)$$

$$3x^2 + 14x + 3$$

$$-(3x^2 + 9x + 6)$$

$5x - 3$ Rest

Ergebnis: $F : G = x^3 - 4x^2 - 2x + 3$ Rest $5x - 3$