§1 Lineare Gleichungssysteme

- In diesem Kapitel werden wir lineare Gleichungssysteme kennenlernen und wann und wie man sie lösen kann. Dafür führen wir die effektive Schreibweise in Matrizen ein. Der Gauß-Algorithmus liefert dann mögliche Lösungen. Zur Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen ist der Begriff der linearen Unabhängigkeit sinnvoll.

1.1 Beispiel / Motivation:

Wie viel Kilogramm Salzsäure der Konzentrationen 12% und 20% muss man mischen, um 10 kg Salzsäure der Konzentration 15% zu erhalten?

Bezeichne x = Masse der 12%-igen Salzsäure
y = Masse der 20%-igen Salzsäure

Wir suchen also x und y, so dass

$$x + y = 10 \qquad (\mathrm{I})$$
$$0{,}12x + 0{,}2y = 1{,}5 \qquad (\mathrm{II}) \qquad (0{,}15 \cdot 10 = 1{,}5)$$

Lösungsidee: Löse (I) nach x auf, also $x = 10 - y$, und setze dies in (II) ein:

$$0{,}12 \cdot (10 - y) + 0{,}2y = 1{,}5$$

Also $1{,}2 + 0{,}08y = 1{,}5$, d.h. $y = \frac{0{,}3}{0{,}08} = 3{,}75$.

Dies ergibt $x = 10 - y = 6{,}25$.

D.h. 6,25 kg 12%-ige Salzsäure und 3,75 kg 20%-ige Salzsäure ergeben in der Mischung 10 kg 15%-ige Salzsäure.

- Fragestellungen dieser Art haben folgende allgemeine Struktur.

1.2 <u>Definition</u>: Ein <u>lineares Gleichungssystem</u> (LGS)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ \_\_\_\_ + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ \_\_\_\_ + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ \_\_\_\_ + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

besteht aus m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \dots x_n$ und Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots m$ und $j = 1, \dots n$ sowie $b_1, \dots b_m \in \mathbb{R}$.
Das LGS heißt <u>homogen</u>, falls $b_1 = \dots = b_m = 0$, und <u>inhomogen</u> sonst.

- Im Beispiel 1.1 hatten wir also ein LGS mit 2 Gleichungen, 2 Unbekannten, Koeffizienten $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 0{,}12$ und $a_{22} = 0{,}2$. Die Elemente b_1, b_2 waren gegeben durch $b_1 = 10$ und $b_2 = 1{,}5$.
- Im Prinzip können wir versuchen jedes LGS dadurch zu lösen, dass wir eine Gleichung nach einer Unbekannten auflösen (z.B. die erste nach x_1, falls nicht gerade $a_{11} = 0$ ist) und das dann in die anderen Gleichungen einsetzen. Dieses Verfahren könnten wir so oft durchführen, bis wir eine Lösung haben. Dieses Verfahren nennen wir <u>Substitutions-</u> oder <u>Einsetzungsmethode</u>. Doch bekommen wir so wirklich immer unsere Lösung?

1.3 Beispiel: (b) Wir betrachten folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \qquad \text{(I)} \\ 2x_1 + 2x_2 &= 4 \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Wir formen (I) um zu $x_1 = 1 - x_2$ und setzen dies in (II) ein: $2(1-x_2) + 2x_2 = 4$.

Dies ergibt jedoch $2 - 2x_2 + 2x_2 = 4$, also $2 = 4$. Was auch immer wir für x_1 und x_2 einsetzen, wir erhalten einen Widerspruch – das LGS ist nicht lösbar.

(a) Wir betrachten

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \qquad \text{(I)} \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Wie oben setzen wir $x_1 = 1 - x_2$ in (II) ein und erhalten $2(1-x_2) + 2x_2 = 2$, also $2 = 2$.
Wir sehen daran: Wie auch immer wir x_2 wählen, wenn wir $x_1 = 1 - x_2$ setzen, so sind (I) und (II) erfüllt. Das LGS hat unendlich viele Lösungen.

1.4 Definition: Eine Lösung eines LGS wie in Def. 1.2 ist ein Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, so dass $x_1, \ldots, x_n$ alle Gleichungen des LGS erfüllt. Die Menge

$$\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ ist Lösung des gegebenen LGS}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt Lösungsmenge des LGS.

(Wir lesen: $\mathbb{L}$ besteht aus allen Elementen $x \in \mathbb{R}^n$, so dass x eine Lösung des gegebenen LGS ist,
also $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{Bedingungen an } x \ldots\}$)

($\mathbb{R}^n$ sehen wir hier als „Menge von n Daten", nicht als n-dimensionalen Raum.)

1.5 <u>Beispiel</u>: (a) In Beispiel 1.3(b) ist $\mathbb{L} = \emptyset$ (leere Menge).

(b) In Beispiel 1.3(a) ist $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 = 1 - x_2 \text{ und } x_2 \text{ ist beliebig} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_2 \text{ ist beliebig} \right\}.$$

(c) In Beispiel 1.1 ist $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6{,}25 \\ 3{,}75 \end{pmatrix} \right\}$. Die Lösung ist hier eindeutig.

- Wir fragen uns: Wie kann man einem LGS ansehen, ob es eine Lösung besitzt oder nicht? Und wie, ob diese Lösung eindeutig ist? Nach Bsp. 1.5 wissen wir ja, dass es für ein LGS drei Fälle geben kann:

  1.) Das LGS hat keine Lösung. ($\mathbb{L} = \emptyset$)
  2.) Das LGS hat eine eindeutige Lösung. ($\mathbb{L}$ besteht aus genau einem Element)
  3.) Das LGS hat unendlich viele Lösungen. ($\mathbb{L}$ hat unendlich viele Elemente)

  Mathematisch gesehen heißt das, dass wir zu einem gegebenen LGS die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ bestimmen müssen.
  Wir werden im Folgenden ein paar sehr wirksame Instrumente dafür kennenlernen, die weit über die pure Einsetzungsmethode hinausgehen.

- Wenn wir also in der Biologie oder Chemie einen Zusammenhang haben, den wir in ein LGS übersetzen können (wie in Bsp. 1.1), so können wir mit Hilfe der Mathematik, also unter Bestimmung von $\mathbb{L}$, bestimmte Fragen über diesen Zusammenhang klären.

1.6 Definition: Wir schreiben das LGS aus Def. 1.2 auch als:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Wir kürzen das ab als $(A|b)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A bezeichnen wir als Matrix mit m Zeilen und n Spalten (kurz: $(m \times n)$-Matrix). Wir schreiben $M(m \times n)$ oder $\mathbb{R}^{m \times n}$ für die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen.

Bei einem homogenen LGS ($b = 0$) schreiben wir oft nur A statt $(A|\begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix})$.

1.7 Beispiel: (b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$ steht für das LGS aus Bsp. 1.3(b).

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$ steht für das LGS aus Bsp. 1.3(a).

(c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0{,}12 & 0{,}2 & 1{,}5 \end{array}\right)$ steht für das LGS aus Bsp. 1.1.

(d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$ steht für
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ -2x_2 - x_4 &= 1 \\ 4x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ steht für
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wiederholung:

Zusammenhang mit der „Realität"

↳ Formulierung als LGS (Bsp. 1.1, Def. 1.2)

↳ Schreibweise der Koeffizienten als $(A|b)$ (Def. 1.6)

z.B.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
(Blatt 1, A3)

oder
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$$

für
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 4 \quad &(\mathrm{I}) \\ -2x_2 + 5x_3 &= 0 \quad &(\mathrm{II}) \\ -40x_3 &= -10 \quad &(\mathrm{III}) \end{aligned}$$

Solche LGS sind besonders schön:

(III) liefert $x_3 = \frac{1}{4}$.

Einsetzen in (II) ergibt $-2x_2 + \frac{5}{4} = 0$, also $x_2 = \frac{5}{8}$.

Einsetzen in (III) ergibt $3x_1 + \frac{25}{8} + \frac{2}{4} = 4$, also $x_1 = \frac{1}{8}$.

Somit ist $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\}$. (eindeutige Lösung)

1.8 Definition: Eine Matrix $A \in M(m \times n)$ hat **Zeilenstufenform**, wenn in jeder Zeile der erste von Null verschiedene Eintrag (von links gelesen) weiter rechts steht als der erste solche Eintrag in der Zeile darüber.

$$\begin{pmatrix} 0 & * & - & - & - & - & - & - & \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & \cdots \end{pmatrix}$$

Zeilen, deren Einträge alle Null sind dürfen sich nur ganz unten in der Matrix befinden. Ein LGS $(A|b)$ hat Zeilenstufenform, wenn die Matrix A Zeilenstufenform hat.

1.9 Beispiel:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \text{ und } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$$

haben Zeilenstufenform,
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
nicht.

- Bei LGS in Zeilenstufenform kann mittels der Einsetzungsmethode leicht überprüft werden, ob eine Lösung existiert, und diese auch ermittelt werden. Ggf. können einige Variablen sogar frei gewählt werden.

1.10 Beispiel: (a) Das LGS
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$$

entspricht
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -40x_3 &= -10 \end{aligned}$$

und hat $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\}$ als Lösungsmenge (s.o.)

(b) Das LGS
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
entspricht ebenfalls dem LGS aus (a) ($\rightarrow$ gleiche Lösungsmenge), da die letzte Zeile $0=0$ keine Bedeutung hat.

(c) Das LGS
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
ist nicht lösbar, da die letzte Zeile $0=1$ ergibt.

(d) Das LGS
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & -10 \end{array}\right)$$
entspricht
$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 4 \\ -2x_4 + 5x_5 &= 0 \\ -40x_5 &= -10 \end{aligned}$$

und hat also als Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2 \text{ sind beliebig} \right\}$.

- Wenn also LGS in Zeilenstufenform so schön sind – wie kann man ein LGS dann auf diese Gestalt bringen? Antwort: 1.12

1.11 **Definition:** Gegeben sei ein LGS $(A|b)$. Unter elementaren Zeilenumformungen verstehen wir folgende Operationen:

(1) Vertauschen zweier Zeilen.
(2) Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null.
(3) Addieren eines Vielfachen einer beliebigen Zeile zu einer anderen.

1.12 **Satz:** Jedes LGS lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen.
(Dieses Verfahren nennt man den „Gauß-Algorithmus".)
Die Lösungsmenge des LGS ändert sich dadurch nicht!

1.13 **Beispiel:** Wir betrachten das LGS von Blatt 1. (in Matrixschreibweise) und wenden den Gauß-Algorithmus an.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{I}) \to 10\cdot(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \to 10\cdot(\mathrm{II}) \\ (\mathrm{III}) \to 10\cdot(\mathrm{III}) \end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{II}) \to (\mathrm{II}) - (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{III}) \to 3\cdot(\mathrm{III}) - 4(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{IV}) \to 3\cdot(\mathrm{IV}) - (\mathrm{I}) \end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{III}) \to (\mathrm{III}) - 7\cdot(\mathrm{II}) \\ (\mathrm{IV}) \to (\mathrm{IV}) - (\mathrm{II}) \\ \\ \end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{IV}) \to 10\cdot(\mathrm{IV}) - (\mathrm{III}) \\ \\ \\ \end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nun hat das LGS Zeilenstufenform und wir können es mit der Einsetzungsmethode lösen (s.o.):

(IV) ist uninteressant ($0=0$) und (III) liefert $x_3 = \frac{1}{4}$. Einsetzen in (II) ergibt $-2x_2 + \frac{5}{4} = 0$, also $x_2 = \frac{5}{8}$. Einsetzen von x_2 und x_3 in (I) liefert schließlich $3x_1 + \frac{25}{8} + \frac{2}{4} = 4$, also $x_1 = \frac{1}{8}$. Somit ist $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\}$.

- Der Gauß-Algorithmus liefert zwar nicht den einzigen Weg, ein LGS in Zeilenstufenform zu bringen, aber immerhin einen, der immer funktioniert.
  Somit sind selbst sehr große, sehr komplizierte LGS Schritt für Schritt in die handlichere Zeilenstufenform umformbar!

1.14 Bemerkung (LGS mit Parameter):

Ist das zu lösende LGS mit einem (oder mehreren) Parameter gegeben, so ist der Gauß-Algorithmus immer noch anwendbar – allerdings ist bei den elementaren Zeilenumformungen darauf zu achten, dass keine Zeile mit Null multipliziert wird. Hier sind ggf. Fallunterscheidungen nötig. Beispiel: Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 + ax_2 + 2x_3 &= -1 \\ ax_1 + 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & -1 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \\ (\mathrm{II}) \longrightarrow (\mathrm{II}) + (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{III}) \longrightarrow 2(\mathrm{III}) - a(\mathrm{I}) \end{bmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 4 & a & -2-a \end{array}\right)$$

(für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ möglich)

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \\ \\ (\mathrm{III}) \longrightarrow a(\mathrm{III}) - 4(\mathrm{II}) \end{bmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & -2a-a^2 \end{array}\right)$$

(nur möglich falls $a \neq 0$)

Fall unterscheidung:

1.) $a \neq 0$. Habe also
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & -2a-a^2 \end{array}\right)$$

1a.) Ist nun $a^2-4 \neq 0$, so gilt mit der Einsetzungsmethode:
$$x_3 = \frac{-2a-a^2}{a^2-4} = \frac{(a+2)(-a)}{(a+2)(a-2)} = -\frac{a}{a-2}$$
$ax_2 - \frac{a}{a-2} = 0$, also $x_2 = \frac{1}{a-2}$

$2x_1 + \frac{a}{a-2} = 1$, also $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a-2}\right) = -\frac{1}{a-2}$

Also $\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} \\ -\frac{a}{a-2} \end{pmatrix}\right\}$ (eindeutige Lösung)

1b.) Ist hingegen $a^2-4=0$, so ist $a=2$ oder $a=-2$.

$a=2$: Die dritte Gleichung ergibt $0=-8$, also $\mathbb{L} = \emptyset$

$a=-2$: Die dritte Gleichung ergibt $0=0$, d.h. das

LGS ist
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
mit $\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\right\}$

2.) $a=0$. Dann ist der Schritt „(III) → a(III) − 4(II)" nicht erlaubt (s. 1.11(2)). Also gehen wir zurück zu
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \end{array}\right)$$
und erhalten $\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ als Lösung.

Wir fassen zusammen: Das LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & -1 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$

hat die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{falls } a = 0$$

$$\mathbb{L} = \emptyset \quad \text{falls } a = 2$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\} \quad \text{falls } a = -2$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} \\ -\frac{a}{a-2} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{sonst } (a \neq 0 \text{ und } a^2 - 4 \neq 0)$$

1.15 <u>Bemerkung</u> zur Lösungsmenge eines LGS:

(a) Wir haben schon gesehen, dass es i.A. drei Fälle geben kann: $\mathbb{L} = \emptyset$, $\mathbb{L}$ besteht aus einem Element, $\mathbb{L}$ hat unendlich viele Elemente.

(b) Hat ein LGS weniger Gleichungen als Unbekannte (also $m < n$ in 1.2), so ist das LGS entweder nicht lösbar ($\mathbb{L} = \emptyset$) oder mindestens eine Variable ist sogar frei wählbar ($\mathbb{L}$ hat unendlich viele Elemente). Solche LGS heißen <u>unterbestimmt</u>.

(c) Ein homogenes LGS ist immer lösbar, denn $x_1 = \ldots = x_n = 0$ ist offenbar eine Lösung. Hier ist also entweder $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ oder $\mathbb{L}$ hat unendlich viele Elemente.

Ein gutes Hilfsmittel bei der Frage, wie groß die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist, ist die lineare Unabhängigkeit.

1.16 Definition: Die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

heißen <u>linear unabhängig</u>, falls aus

$$x_1 \cdot a_1 + \dots + x_n \cdot a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } x_j \in \mathbb{R}) \text{ folgt: } x_1 = \dots = x_n = 0.$$

Hierbei ist $x_j \cdot a_j = \begin{pmatrix} x_j a_{1j} \\ x_j a_{2j} \\ \vdots \\ x_j a_{mj} \end{pmatrix}$. Andernfalls heißen sie <u>linear abhängig</u>.

Diese Gleichung ist äquivalent zu dem homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und es gilt: $a_1, \dots a_n$ sind linear unabhängig genau dann, wenn dieses LGS außer dem Nullvektor keine weiteren Lösungen hat.

Umgekehrt heißt das: Um zu wissen, ob ein homogenes LGS eine eindeutige Lösung hat, müssen wir überprüfen, ob die Spalten der Matrix linear unabhängige Vektoren bilden.

1.17 Bemerkung: (a) Gibt es $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}$, so dass für mindestens ein $x_j \neq 0$ gilt und ist $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0$, so sind die Vektoren $a_1, \dots a_n$ linear abhängig und das entsprechende LGS hat unendlich viele Lösungen.

(b) Ist einer der Vektoren $a_j = 0$, so sind die Vektoren $a_1, \dots a_n$ immer linear abhängig, da beispielsweise
$$0 \cdot a_1 + \dots + 0 \cdot a_{j-1} + 1 \cdot a_j + 0 \cdot a_{j+1} + \dots + 0 \cdot a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ ist.

(c) Ist $n > m$, also die Anzahl der Vektoren größer als die Dimension von $\mathbb{R}^m$, so ist das LGS unterbestimmt und hat nach 1.15(b) und 1.15(c) unendlich viele Lösungen. Die Vektoren $a_1, \dots a_n$ sind also linear abhängig.

1.18 Beispiel: (a) Sind die Vektoren $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig? Wir betrachten das entsprechende homogene LGS
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$ und bringen es mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf die Form $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge ist $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} x_3 \\ -\frac{1}{3} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \ x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}.$$

z.B. ist $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$ und $4a_1 - a_2 + 3a_3 = 0$.

Die Vektoren a_1, a_2, a_3 sind linear abhängig.

(b) Hat $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ eine eindeutige Lösung? Betrachte

$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und sehe, dass $a_3 = 2a_1$.

Also ist $2a_1 + 0 \cdot a_2 - a_3 = 0$, d.h. a_1, a_2, a_3 sind linear abhängig und das LGS hat keine eindeutige Lösung.

Allgemein gilt: Ist $a_i = x \cdot a_j$ für i, j und $x \in \mathbb{R}$, so sind $a_1, \dots a_n$ linear abhängig, da
$$0 \cdot a_1 + \dots + a_i + \dots - x a_j + \dots + 0 \cdot a_n = 0$$

(c) Die Vektoren $a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, da das entsprechende homogene LGS der Form $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist und nur die Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt.

(d) Die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig nach 1.17(c).