§2 Matrizen und Determinanten

Da die Lösung eines LGS $(A|b)$ maßgeblich von der Matrix $A \in M(m\times n)$ abhängt, werden wir diese nun genauer untersuchen. Wir werden dafür Matrizen als eigene Objekte ansehen und Rechenregeln für diese aufstellen. Besonders wichtig wird dabei das Invertieren einer Matrix sein.

2.1 <u>Definition</u>: Seien $A \in M(m\times n)$ und $B \in M(n \times l)$ zwei Matrizen mit den Einträgen $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,l}}$.
Dann ist das <u>Matrixprodukt</u> $C = A\cdot B$ die Matrix $C \in M(m\times l)$ mit den Einträgen $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$
für $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,l$. („i-te Spalte mal j-te Zeile")
Hierbei ist das Matrixprodukt nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt.

2.2 <u>Beispiel</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-3) \\ -1\cdot 2 + 3\cdot 0 & -1\cdot 0 + 3\cdot 2 & -1\cdot 1 + 3\cdot(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -2 & 6 & -10 \end{pmatrix}$$

Hingegen ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ nicht definiert.

2.3 <u>Bemerkung</u>: (a) Wir können eine Matrix $A \in M(m \times n)$ auf einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ anwenden und erhalten einen Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ (schreibe $Ax = y$), also $y_i := a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$.

Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3)$ beispielsweise

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Dies entspricht einer <u>linearen Abbildung</u> $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die x auf Ax abbildet, und für die gilt:

$$A(x+y) = Ax + Ay, \quad A(\alpha x) = \alpha(Ax), \text{ wenn } x, y \in \mathbb{R}^n$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist.

Für ein LGS $(A|b)$ entspricht die Sichtweise $Ax = b$ genau dem Bekannten!

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Das LGS

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

entspricht $(A|b)$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Und $Ax = b$ ist genau das Gleiche:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In gewisser Weise bildet also f_A die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ auf b ab. Wenn wir das Umdrehen könnten, könnten wir die Unbekannten sofort aus A und b bestimmen! $\rightsquigarrow$ inverse Matrizen

(b) Betrachtet man Matrizen als Abbildungen, so lassen sich einige geometrische Phänomene gut beschreiben.
Zum Beispiel bewirkt

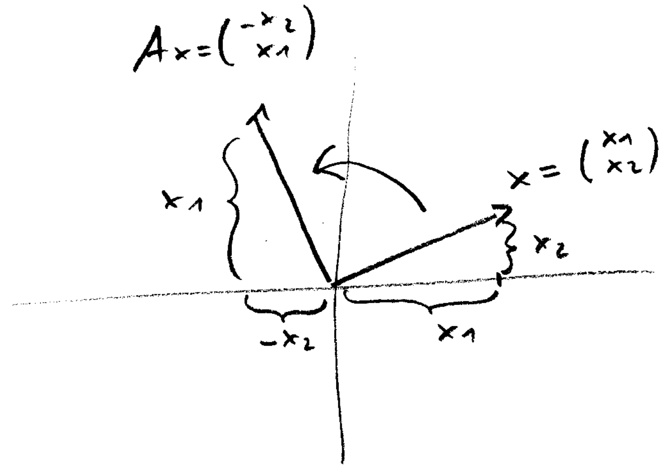
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Drehung um $90°$ (gegen den Uhrzeigersinn):

Der Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ wird unter

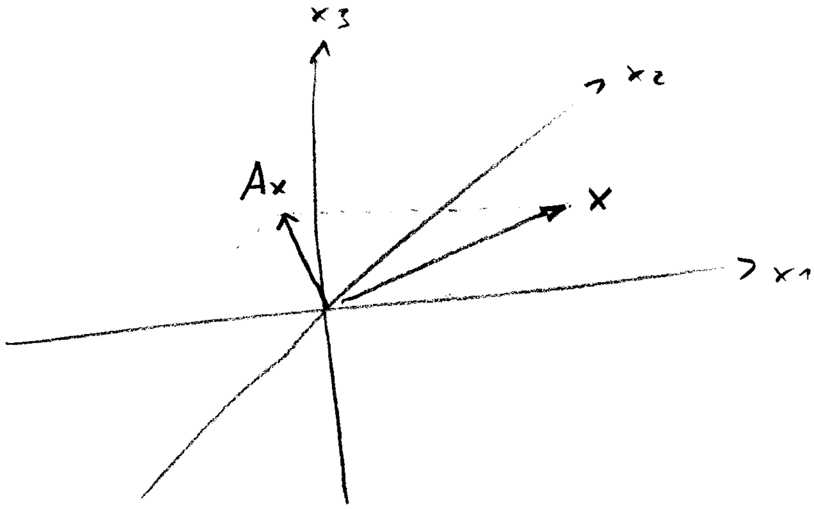
f_A abgebildet auf $f_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Siehe auch folgendes Bild.



Die Matrix $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ hingegen beschreibt eine Spiegelung eines Vektors $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ an der x_2-x_3-Ebene:

Es ist $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.



2.4 Rechenregeln für Matrizen:

(1) Matrixprodukt $A\cdot B$ (siehe Def. 2.1)

(2) $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

(3) Achtung: $A\cdot B \neq B\cdot A$ (z.B. für $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$)

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

(4) $A+B$: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Auch hier muss beachtet werden, dass A und B die richtige Größe haben. Hier: A und B müssen die gleiche Anzahl an Zeilen haben, genauso für die Spalten.

(5) $\alpha \cdot A$ für $\alpha \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$

- Wir wollen nun die inversen Matrizen kennenlernen. Dafür betrachten wir nur <u>quadratische</u> Matrizen, also Matrizen $A \in M(n \times n)$, bei denen Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen.

2.5 <u>Definition</u>: Die $n \times n$-Matrix $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ heißt <u>Einheitsmatrix</u> der Größe n. Es gilt $A \cdot E_n = A$ und $E_n \cdot A = A$ für jede $n \times n$-Matrix.

Eine Matrix $A \in M(n \times n)$ heißt <u>invertierbar</u>, falls es eine Matrix $B \in M(n \times n)$ gibt, so dass $A \cdot B = E_n$ und $B \cdot A = E_n$ gilt. B heißt dann <u>inverse Matrix</u> zu A, schreibe $B = A^{-1}$.

2.6 Bemerkung: (a) Ist eine Matrix invertierbar, so ist ihre inverse Matrix eindeutig bestimmt.

(b) Man braucht nur $A \cdot B = E_n$ oder $B \cdot A = E_n$ zu zeigen, die andere Gleichung folgt dann automatisch.

(c) Sind A und C invertierbar, so ist auch $A \cdot C$ invertierbar mit inverser Matrix $C^{-1} \cdot A^{-1}$.

(d) Die inverse Matrix von E_n ist E_n selbst.

2.7 Beispiel: Die inverse Matrix von $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$.

(Klar, denn $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn, während $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn beschreibt.)

- Invertierbare Matrizen hängen stark mit den Lösungen von homogenen LGS zusammen:

2.8 Satz: (a) Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn das zugehörige LGS $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ nur die Lösung $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt. (Erinnerung an Bem. 1.15(c): Ein homogenes LGS hat immer mindestens eine Lösung, nämlich $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Aber hat es noch mehr? Ja, falls die Matrix nicht invertierbar ist.)

(b) Ist $A \in M(n \times n)$ invertierbar, so hat jedes LGS der Form $Ax = b$ (bzw. $(A|b)$) genau eine Lösung! Diese ist gegeben durch $x = A^{-1}b$, also indem man die inverse Matrix von A auf b anwendet.

Ein Schaubild zu Satz 2.8:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\text{Unbekannte } x_1,\dots, x_n \arrow[r, bend left, "\substack{\text{die Matrix } A\\ \text{bildet diese ab}}"] & \text{Koeffizienten } b_1,\dots, b_n \arrow[l, bend left, "\substack{\text{die Matrix } A^{-1}\\ \text{bildet diese ab}}"]
\end{tikzcd}
$$

2.9 __Beispiel:__ Betrachte das LGS

$$
\begin{aligned}
-3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2\\
-2x_1 + 2x_3 &= -6\\
3x_1 - x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Ist es lösbar?

Betrachte $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $(A|b)$.

Das entspricht also $Ax = b$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Jemand verrät uns, dass A invertierbar ist mit

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

Dann ist $A^{-1}b = x$ eine Lösung, also

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 6 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}
$$

Die Lösung ist außerdem eindeutig!

2.10 Berechnung der inversen Matrix:

Ist eine Matrix $A \in M(n \times n)$ invertierbar?

1.) Schreibe $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots 0 & 1 \end{array}\right)$ (also $(A \mid E_n)$)

2.) Führe den Gaußalgorithmus aus, so dass wir

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} d_1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & d_n & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

haben ($*$ steht für „irgendwas")

Hierbei werden die Zeilenumformungen auch auf die rechten Seite einfach mit ausgeführt.
Die Matrix auf der linken Seite hat jetzt die Gestalt einer „oberen Dreiecksmatrix".

3.) Ist ein $d_i = 0$, so ist A nicht invertierbar.
Andernfalls, fahre mit elementaren Zeilenumformungen fort, bis wir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

haben (also $(E_n \mid B)$).

Die Matrix B auf der rechten Seite ist dann die inverse Matrix zu A.

2.11 Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{II}) \to 3\cdot(\mathrm{II}) - 2(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{III}) \to (\mathrm{III}) + (\mathrm{I}) \end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die Diagonaleinträge -3, -2 und 2 sind ungleich Null, also ist die Matrix invertierbar. Fahre also fort:

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{I}) \to (\mathrm{I}) - (\mathrm{III}) \\ (\mathrm{II}) \to (\mathrm{II}) - (\mathrm{III}) \end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{I}) \to 2\cdot(\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) \end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -6 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathrm{I}) \to -\frac{1}{6}\cdot(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \to -\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{II}) \\ (\mathrm{III}) \to \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{III}) \end{array}\right] \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Die inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist also

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(Probe: Multiplikation der beiden liefert E_3)

Wiederholung:

Schreibweisen für ein LGS

1.)
$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & \dots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{matrix}$$

2.) $(A \mid b)$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

3.) $Ax = b$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

also $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Hier steckt die Idee dahinter

$$\begin{tikzcd} \text{Unbekannte } x_1, \dots x_n \arrow[r, bend left, "\text{die Matrix } A \text{ bildet diese ab}"] & \text{Geforderte } b_1, \dots b_m \arrow[l, bend left, "\text{die Matrix } A^{-1} \text{ bildet diese ab}"] \end{tikzcd}$$

Die Matrix A entspricht einer Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ durch $f_A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Kann man nun diese Abbildung umkehren, sprich die Matrix A invertieren, so kann man die Unbekannten $x_1, \dots x_n$ <u>direkt</u> aus $b_1, \dots b_m$ bestimmen, per $x = A^{-1}b$.

Hierfür betrachten wir nur quadratische Matrizen ($n = m$).

Das Invertieren der Matrix A ist bezüglich des Matrixprodukts $A \cdot B$ (s. Def. 2.1).

Ergänzung Satz 2.8: Ist $A \in M(n\times n)$ eine Matrix, so gilt:

(a) A ist invertierbar genau dann, wenn $Ax = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ nur die Lösung $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ besitzt. (Im Allgemeinen kann ein homogenes LGS noch mehr Lösungen haben – die Lösung $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ gibt es immer.)

(b) Ist A invertierbar, so hat ein LGS $Ax=b$ genau die Lösung $x = A^{-1}b$. (Rückführung auf hom. LGS)

Wann ist eine Matrix invertierbar?

1. Möglichkeit: führe den Gaußalgorithmus mit $(A \mid E_n)$ aus.
2. Möglichkeit: Berechne die Determinante der Matrix.

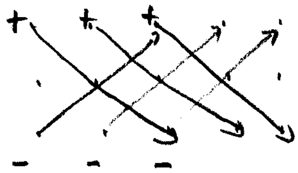
2.12 Definition: Für eine quadratische Matrix $A \in M(n\times n)$ kann die **Determinante** $\det(A) \in \mathbb{R}$ definiert werden:

(a) $n=2$. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Wir setzen $\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

(b) $n=3$. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$

Dies folgt der Regel von Sarrus (1833):

$$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

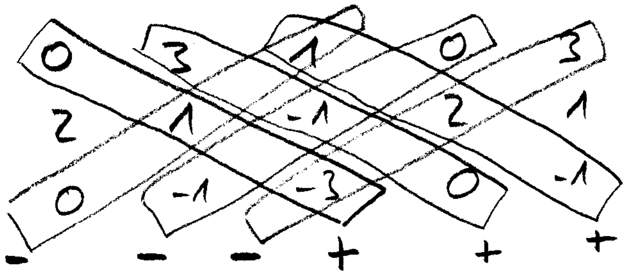


(c) $n \geq 4$. Etwas komplizierter, siehe später.

2.13 Beispiel: (a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2$

(b) $\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-1) - 2\cdot 3 = -5$

(c) $\det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 0\cdot 1\cdot(-3) + 3\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot(-1) - 0\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)\cdot 0 - (-3)\cdot 2\cdot 3 = 16$



2.14 Rechenregeln für Determinanten:

(a) Sind $A, B \in M(n\times n)$ beliebige Matrizen, so ist $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$

(b) Für die Einheitsmatrix E_n gilt $\det(E_n) = 1$

(c) Ist $A \in M(n\times n)$ invertierbar, so ist $\det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Der folgende Satz zeigt die Nützlichkeit der Determinante.

2.15 Satz: Ist $A \in M(n\times n)$, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent.
(das heißt: Gilt eine der Bedingungen, so gelten alle. Gilt eine nicht, so gilt keine.)

(i) $\det(A) \neq 0$

(ii) A ist invertierbar.

(iii) Die Spalten von A, also die n Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

(iv) Die Zeilen von A, also die n Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

(v) Das homogene LGS $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ hat nur die Lösung $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(vi) Für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar und die Lösung ist $x = A^{-1}b$.

2.16 Beispiel: (a) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ invertierbar?

Nach Bsp. 2.13(c) ist $\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 16 \neq 0$, also: Ja!

(b) Betrachte das LGS

$$\begin{aligned} 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wir wissen, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ist immer eine Lösung. Gibt es noch weitere?

Betrachte die zugehörige Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Diese ist invertierbar nach (a), also ist die Lösung $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eindeutig, es gibt keine weiteren.

(c) Betrachte das LGS

$$\begin{aligned} 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Hat es eine Lösung? Wenn ja, ist sie eindeutig?

Nach (a) ist die zugehörige Matrix invertierbar. Also ist das LGS $Ax = b$ mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar und die Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Hierfür muss A^{-1} allerdings berechnet werden.

(d) Sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig? Folgt also aus $x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ schon $x_1 = x_2 = x_3 = 0$? Antwort: Ja, denn v_1, v_2, v_3 sind die Spalten der invertierbaren Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

(e) Sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig? Betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ und berechne $\det(A) = 2 + 0 + 4 - 0 - 4 - 2 = 0$. Also sind die Vektoren linear abhängig.

Es gilt nämlich: $1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

aber $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$, also <u>nicht</u> $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(f) Was ist die Determinante von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$?

Da $v_1 + v_2 - v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für die Spalten der Matrix, sind die Spalten von A linear abhängig, also $\det(A) = 0$.

(g) Was ist die Determinante von $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Ist die Matrix invertierbar?

Sind die Spalten linear unabhängig?

Wieviele Lösungen hat das LGS $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Antwort: Die letzte Zeile ist das doppelte der ersten. Für die Zeilenvektoren $z_1, \ldots z_5$ ist also $2z_1 + 0z_2 + 0z_3 + 0z_4 - z_5 = 0$, die Zeilenvektoren sind also linear abhängig.

Folglich ist $\det(A) = 0$, die Matrix ist nicht invertierbar, die Spalten sind nicht linear unabhängig, das LGS $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ hat unendlich viele Lösungen.

(h) Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist das LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & a & 2 & -1 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ lösbar? (vgl. Bsp. 1.14)

Also $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & a & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\det(A) = 0 + 0 + 4 + a^2 - 8 - 0 = a^2 - 4$.

Ist $a = 2$ oder $a = -2$, so ist $\det(A) = 0$, das LGS hat also entweder keine oder unendlich viele Lösungen nach Satz 2.14.

(wir wissen aus Bsp. 1.14: $a = 2$ $\mathbb{L} = \emptyset$
$a = -2$ $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\}$)

Ist hingegen $a \neq 2$ und $a \neq -2$, so ist $\det(A) \neq 0$, also ist das LGS eindeutig lösbar.

(wir wissen aus Bsp. 1.14: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} \\ -\frac{a}{a-2} \end{pmatrix} \right\}$)

2.17 Berechnung der Determinante mit dem Gauß-Verfahren (für $A \in M(n\times n)$):

Ziel ist es wieder, die Matrix auf obere Dreiecksform zu bringen, denn es gilt $\det\begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$.
(klar für $n=2, n=3$!)

Bspw.: $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = -48$

Was ist die Determinante von $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(I) ⟷ (II) vertauscht $\boxed{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

① Vertauscht man zwei Zeilen einer Matrix, so ändert die Determinante das Vorzeichen.

(III) ⟶ 3(III) + (II) $\boxed{\frac{1}{3}}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

② Multipliziert man eine Zeile mit einer Zahl ungleich Null, so ändert sich der Wert der Determinante um diesen Faktor.

③ Addiert man ein Vielfaches einer beliebigen Zeile zu einer anderen, so ändert sich die Determinante nicht.

Also ist $\det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = (-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = 16.$

2.18 Cramer'sche Regel:

Ist $A \in M(n \times n)$ mit $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$, so hat $Ax = b$ genau eine Lösung. Diese kann man entweder bestimmen, indem man A^{-1} berechnet und dann $x = A^{-1}b$ berechnet, oder:

- ersetze die j-te Spalte von A durch b und bezeichne diese Matrix mit A_j.
- Die Lösung $x_1, \ldots x_n$ ist gegeben durch $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ für $j = 1, \ldots n$.

Bsp.: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$. Es ist $\det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 16 \neq 0$.

Also Verfahren anwendbar!

$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A_1 = 4$, $\det A_2 = -10$, $\det A_3 = -2$

Also $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = -\frac{5}{8}$, $x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = -\frac{1}{8}$.

2.19 Entwicklung einer Determinante nach einer Zeile oder Spalte:

Betrachte: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i=3 \\ \\ \end{array} \in M(4\times 4)$.

(1) Wähle eine Zeile oder Spalte mit möglichst vielen Nullen. Hier z.B. die 3-te Zeile, also $i=3$. [Bei Spalte: j]

(2) Berechne folgende Determinanten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & \boxed{4} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & \boxed{0} & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & \boxed{0} \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

müssen nicht berechnet werden, da 0 im Schnittpunkt steht.

(3) Dann ist $\det(A) = \underbrace{(-1)^{i+1}\cdot\boxed{2}\cdot(-7)}_{-14} + \underbrace{(-1)^{i+2}\cdot\boxed{4}\cdot(-5)}_{20} = 6$.

Allgemein: $\det(A) = (-1)^{i+1}\cdot a_{i1}\cdot\det(A_{i1}) + \ldots + (-1)^{i+n}\cdot a_{in}\cdot\det(A_{in})$

Matrix ohne i-te Zeile und 1-te Spalte

bzw. $\det(A) = (-1)^{j+1}\cdot a_{1j}\cdot\det(A_{1j}) + \ldots + (-1)^{n+j}\cdot a_{nj}\cdot\det(A_{nj})$.