§ 3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir wissen, dass eine Matrix $A \in M(n \times n)$ eine Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ darstellt, wobei $Ax = b$ ist, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$.
Für viele Phänomene ist es wichtig zu wissen, welche „Zustände" $x \in \mathbb{R}^n$ unter der „Transformation" A erhalten bleiben, wann also $Ax = x$ gilt oder allgemeiner $Ax = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Der Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ wird unter der Abbildung f_A also entweder gar nicht verändert oder lediglich um den Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ gestreckt bzw. gestaucht.
Die Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ operiert hier auf die einfachste Art und Weise – nämlich als Multiplikation mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$.
In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, wie man zu einer gegebenen Matrix $A \in M(n \times n)$ Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ und Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ findet, so dass $Ax = \lambda x$ gilt.

3.1 <u>Definition</u>: Ist $A \in M(n \times n)$, so heißt $\lambda \in \mathbb{R}$ <u>Eigenwert</u> von A, falls es einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ (wichtig!) gibt, so dass $Ax = \lambda x$ gilt. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so heißen alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = \lambda x$ <u>Eigenvektor</u> zu λ.

3.2 <u>Beispiel</u>: (a) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, so sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ Eigenwerte von A, denn für $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, für $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, für $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $Ax_3 = \lambda_3 x_3$.
Zu $\lambda_1 = 1$ ist jeder Vektor $x = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ ein Eigenvektor, denn $Ax = x$.

(b) Ist $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \in M(2\times 2)$ und $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

so ist $Ax = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Ay = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot y$, $Az = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = z$.

Somit ist x kein Eigenvektor, aber y ist einer zum Eigenwert 2, z zum Eigenwert 1.

Auch $y' = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2y$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 2, genauso wie $y'' = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3y$. Klar: $Ay' = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2y'$, $Ay'' = 2y''$.

(c) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2\times 2)$ so sind $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren, denn $Ax = 2x$ und $Ay = 0 \cdot y$.

Null darf auch ein Eigenwert sein!

<u>3.3 Bemerkung</u>: Ist $A \in M(n\times n)$ und ist λ ein Eigenwert von A, $x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zu λ, so ist auch $a \cdot x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zu A für alle $a \in \mathbb{R}$, insbesondere auch $-x$.

Klar: Mit $x' := a x$ ist $Ax' = A(a\cdot x) = a\cdot(Ax) = a\cdot\lambda\cdot x = \lambda\cdot(ax) = \lambda x'$.

Wie findet man nun Eigenwerte und Eigenvektoren?

Ist $A \in M(n\times n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Ax = \lambda x$$

so ist auch

$$(\lambda E_n - A)x = 0 \quad \left(= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Dies ist ein homogenes LGS mit Matrix $B := \lambda E_n - A$ und $Bx = 0$. Wir wollen aber nun, dass dieses LGS eine Lösung $x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Nach Satz 2.15 darf B also <u>nicht</u> invertierbar sein, d.h. es muss $\det(\lambda E_n - A) = \det(B) = 0$ sein.

Der Ausdruck $\det(\lambda E_n - A)$ ist ein Polynom vom Grad n, dessen Nullstellen man bestimmen muss.

3.4 <u>Definition:</u> Ist $A \in M(n\times n)$ und $E_n \in M(n\times n)$ die Einheitsmatrix, so heißt $p_A(\lambda) := \det(\lambda \cdot E_n - A)$ das <u>charakteristische Polynom</u> von A.

3.5 <u>Beispiel:</u> (a) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, so ist

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_3 - A) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ nach Sarrus.

Was sind die Nullstellen? $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

(b) Ist $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, so ist $p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 3 & \lambda+1 \end{pmatrix} =$

$$= (\lambda-4)(\lambda+1) + 6$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Mit der pq-Formel sieht man $\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2} + \frac{3}{2} =$

$\left(\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2} \text{ für } \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \right)$

Also sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ die Nullstellen.

(c) Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, so ist $p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1$

$$= \lambda^2 - 2\lambda$$

Somit sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ die Nullstellen.

3.6 <u>Satz:</u> Die Eigenwerte einer Matrix $A \in M(n\times n)$ sind <u>genau</u> die Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_A.

Die Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ sind <u>genau</u> die Lösungen des homogenen LGS $(\lambda E_n - A)x = 0$.

Im obigen Beispiel 3.5 und Beispiel 3.2 sieht man, dass die Nullstellen des charakteristischen Polynoms tatsächlich genau die Eigenwerte sind.

3.7 Beispiel: (a) Ist $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, so sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A. Wie findet man zugehörige Eigenvektoren? Laut Satz 3.6 muss man das homogene LGS $(\lambda_i E_2 - A)x_i = 0$ lösen, also $\begin{pmatrix} \lambda_i - 4 & -2 \\ 3 & \lambda_i + 1 \end{pmatrix} x_i = 0$.

$\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat Lösungen $\begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{3}{2}x_1 \end{pmatrix}$

mit $x_1 \in \mathbb{R}$ beliebig, also z.B. mit $x_1 = 2$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat Lösungen $\begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$

mit $x_1 \in \mathbb{R}$ beliebig, also z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.8 Bemerkung: Ist $A \in M(n \times n)$, so ist das charakteristische Polynom p_A vom Grad n, kann also höchstens n Nullstellen besitzen. A besitzt also maximal n verschiedene Eigenwerte. Nach Bemerkung 3.3 gibt es hingegen zu jedem Eigenwert unendlich viele Eigenvektoren.

Eigenwerte zu bestimmen ist in vielen Bereichen der Physik, Elektrotechnik, Maschinenbau/Statik, Biologie etc. wichtig. Schwingungsfähige Systeme haben bspws. bevorzugte Frequenzen, die durch Eigenvektoren berechnet werden können. z.B. Musikinstrumente, aber auch Bauwerke. 1831 und 1850 wurden in Broughton bzw. Angers Brücken zum Einsturz gebracht, weil Soldaten im Gleichschritt marschierten und sie in Schwingungen versetzten.

Wir haben also gesehen, dass wir die Eigenwerte einer Matrix durch Lösen des charakteristischen Polynoms bestimmen können. Aber - hat dieses denn immer Nullstellen?

§4 komplexe Zahlen

Wir haben gesehen, dass die Bestimmung von Nullstellen von Polynomen wichtig sein kann. Aber, ist dies immer möglich?
z.B. hat $x^2 = 1$ offensichtlich die Lösungen $+1$ und -1.
Hingegen ist $x^2 = -1$ für uns zunächst nicht lösbar.
Wir müssen uns Gedanken machen über Zahlensysteme.

4.1 Zahlensysteme:

(a) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.
Das ist die grundlegendste aller Zahlenmengen, die des „Zählens".
Wir können so z.B. die Gleichung $x + 2 = 4$ lösen, mit $x = 2$.
Die Gleichung $x + 4 = 2$ ist hingegen in $\mathbb{N}$ nicht lösbar.
(Das ist die Frage nach den Nullstellen des Polynoms $x + 2$)

(b) $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen. Das schließt das Zählen von „Nichtvorhandenem" mit ein und löst z.B. $x + 4 = 2$ bzw. $x + 2 = 0$ mit $x = -2$.
Um auch $3x - 2 = 0$ zu lösen, müssen wir den Zahlenraum jedoch erneut erweitern.

(c) $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \}$ ist die Menge der rationalen Zahlen, also der Brüche. Rationale Zahlen beschreiben das Verhältnis (ratio) von Dingen, z.B. in der Musik: eine Oktave ist das Verhältnis $\frac{1}{2}$, eine Quint ist $\frac{2}{3}$, eine Quart ist $\frac{3}{4}$, große Terz $\frac{4}{5}$, kleine $\frac{5}{6}$ ...
Die Gleichung $3x - 2 = 0$ ist mit $x = \frac{2}{3}$ lösbar, $x^2 = 2$ hingegen nicht.

(d) $\mathbb{R}$ ist die Menge der *reellen Zahlen*. Sie beinhaltet alle Zahlen aus $\mathbb{Q}$, aber auch z.B. $\sqrt{2}$, π, e, $1{,}2345\ldots$ etc.
Sie beinhaltet auch die irrationalen Zahlen, also solche, die man nicht als $\frac{p}{q}$ schreiben kann, für $p,q \in \mathbb{Z}$. Für die Pythagoreer war die Entdeckung, dass nicht alle Zahlen rational sind ein Schock, denn für sie war das Universum nach bestimmten Zahlenverhältnissen aufgebaut, also in rationalen Zahlen. Dummerweise folgt gerade aus dem Satz von Pythagoras ein Gegenbeispiel: $1^2+1^2=x^2$, also $x^2=2$.
Die Lösung, $x=\sqrt{2}$ ist aber irrational.

Beweis: Wir nehmen an, dass man x als $x=\frac{p}{q}$ schreiben kann, wobei p und q natürliche Zahlen sind. Wir nehmen außerdem an, dass der Bruch schon gekürzt ist.
Ist nun $2=x^2=\frac{p^2}{q^2}$, so ist $p^2=2q^2$. Somit ist p^2 durch 2 teilbar, also auch p selbst. Schreibe also $p=2a$, wobei a eine natürliche Zahl ist.
Dann ist jedoch auch $2q^2=p^2=4a^2$, d.h. $q^2=2a^2$. Somit ist auch q^2 durch 2 teilbar, also auch q.
Damit sind aber sowohl p, als auch q durch 2 teilbar und der Bruch $x=\frac{p}{q}$ kann gekürzt werden zu $x=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b}$ $(q=2b)$.
Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, die also nicht wahr sein kann. q.e.d.

Doch selbst in $\mathbb{R}$ können wir bspw. $x^2=-1$ nicht lösen, bzw. die Nullstellen von x^2+1 nicht bestimmen.
Im 16. Jahrhundert gab es daher eine weitere Erweiterung des Zahlenbegriffs.

(e) $\mathbb{C}$ ist die Menge der *komplexen Zahlen*. Sie enthält alle reellen Zahlen, aber auch eine Zahl i, die *imaginäre Zahl*, die genau die Lösung der Gleichung $x^2=-1$ ist, also $i^2=-1$ erfüllt.

Wir haben somit die Zahlenbereiche

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

kennengelernt. Ist das nun abgeschlossen? Können wir nun für jedes Polynom $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ die Nullstellen bestimmen? Ja! Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist das immer möglich. Genauer gibt es für jedes Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n$, so dass

$$p(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2) \ldots (x - z_n) \text{ gilt.}$$

Das Polynom zerfällt also vollständig in Linearfaktoren und die Zahlen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ sind genau die Nullstellen von p.

4.2 Definition/Rechenregeln für $\mathbb{C}$: (a) Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann als $z = a + b \cdot i$ geschrieben werden, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ sind und i die imaginäre Zahl mit $i^2 = -1$ ist.
Somit ist $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, denn für $b = 0$ ist z eine reelle Zahl.

Bsp.: $2 + 3i$, $\sqrt{3} - \frac{7}{2} i$, $-\frac{2}{3} + 0i = -\frac{2}{3}$ (reell), $0 - \sqrt{2} i = -\sqrt{2} i$ (rein imaginär)

(b) Die Addition ist $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) i$

Bsp.: $(-2 + \frac{1}{2} i) + (3 - i) = 1 - \frac{1}{2} i$, $3i + (-2 - 3i) = -2$

(c) Die Subtraktion ist $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d) i$

Bsp: $(-2 + \frac{1}{2} i) - (3 - i) = -5 + \frac{3}{2} i$

(d) Die Multiplikation ist $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad) i$

Also $(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 \underset{(i^2 = -1)}{=} ac + bci + adi - bd$

Bsp.: $(3 + 2i)(1 - i) = 3 + 2i - 3i - 2i^2 = 5 - i$

oder $i(1 + i) = i + i^2 = i - 1 = -1 + i$

oder $(a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

(e) Die Division ist $\dfrac{(a+bi)}{(c+di)} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$

Also $\dfrac{(a+bi)}{(c+di)} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{\underbrace{c^2+cdi-cdi-d^2i^2}_{=c^2+d^2}}$

Erweitern mit $(c-di)$

Bsp.: $\dfrac{1}{3-4i} = \dfrac{(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{3+4i}{9+16} = \dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i$

oder $\dfrac{2-i}{-1+3i} = \dfrac{(2-i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)} = \dfrac{-2+i-6i+3i^2}{1+9} = \dfrac{-5}{10} - \dfrac{5}{10}i = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

4.3 Definition: Ist $z = a+bi$ eine komplexe Zahl, so heißt

(a) $a = \mathrm{Re}(z)$ der Realteil von z

(b) $b = \mathrm{Im}(z)$ der Imaginärteil von z

(c) $\bar{z} = a-bi$ das komplex Konjugierte von z

(d) $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ der Betrag von z

4.4 Beispiel: (a) $z = 1-4i$. Dann $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(z) = -4$, $\bar{z} = 1+4i$, $|z| = \sqrt{17}$

(b) $z = -3$. Dann $\mathrm{Re}(z) = -3$, $\mathrm{Im}(z) = 0$, $\bar{z} = -3$, $|z| = 3$

(c) $z = i$. Dann $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = 1$, $\bar{z} = -i$, $|z| = 1$

4.5 weitere Rechenregeln: Sind $z = a+bi$ und $w = c+di$ komplexe Zahlen, so gilt:

(a) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$
(klar: $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}((a+bi)+(a-bi)) = \frac{1}{2}(2a) = a = \mathrm{Re}(z)$)

(b) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ (klar: $z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$)

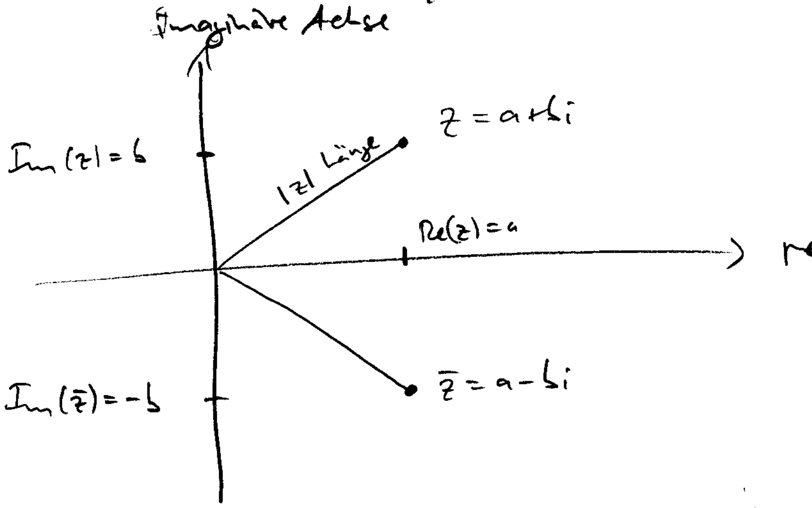
(c) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ falls $z \neq 0$

(d) $|z+w| \leq |z|+|w|$ „Dreiecksungleichung" und $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

(e) $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$, $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$, $\bar{\bar{z}} = z$

4.6 Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußebene:

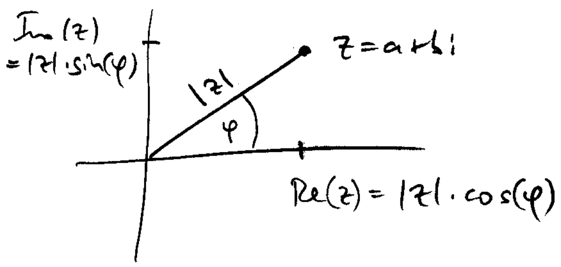
Ist $z = a + bi$ eine komplexe Zahl, so kann man diese auch als Vektor $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ im Koordinatensystem darstellen.



Realteil und Imaginärteil von z entsprechen hierbei den Koordinaten des Vektors, der Betrag $|z|$ der Länge des Vektors. Das komplex Konjugierte $\bar{z}$ von z entspricht dem an der reellen Achse gespiegelten Vektor.

4.7 Polardarstellung komplexer Zahlen

In obiger Darstellung ist der Vektor $z = a+bi$ eindeutig durch seine Länge $|z|$ und den Winkel φ („das Argument von z") bestimmt. z liegt dann in Polarkoordinaten vor.



Man kann z also auch schreiben als

$$z = \mathrm{Re}\, z + (\mathrm{Im}\, z) \cdot i = |z| \cos\varphi + |z| \sin\varphi\, i = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

die Polardarstellung von z.

Man kann φ durch $\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}$ und $\sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}$ bestimmen.

In Polarkoordinaten lässt sich einfacher multiplizieren und dividieren.

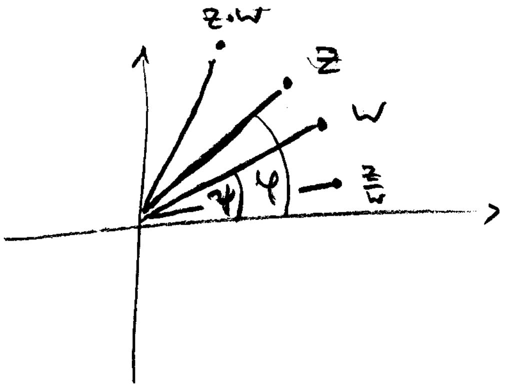
4.8 Bemerkung: In Polarkoordinaten kann man besonders einfach multiplizieren und dividieren: Sind $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ und $w = |w|(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$ komplexe Zahlen in Polardarstellung, so ist

(i) $$z \cdot w = |z| \cdot |w| \left(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)\right)$$

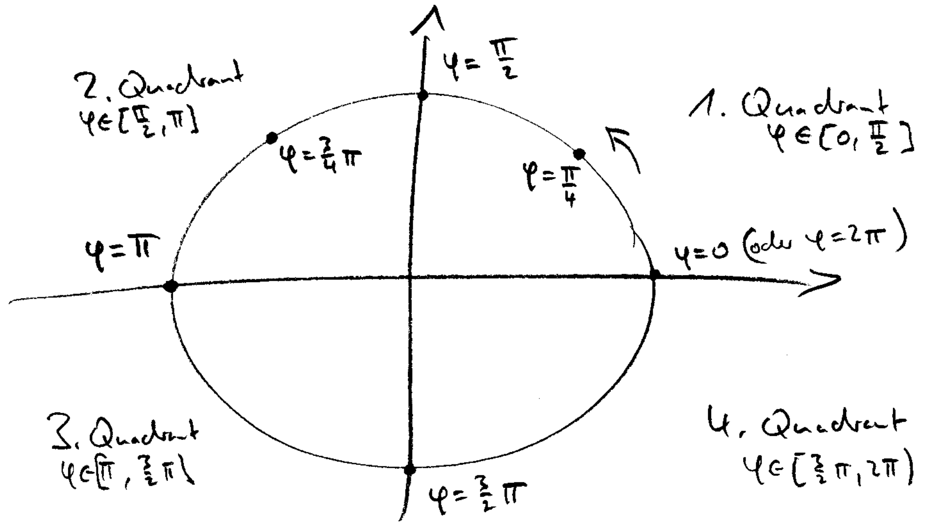
(ii) $$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \left(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)\right)$$

(klar: $$z \cdot w = |z||w| \Big[\big(\underbrace{\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)}_{=\cos(\varphi+\psi)} \big) + i \big(\underbrace{\cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi)}_{=\sin(\varphi+\psi)} \big) \Big]$$)

Damit ist die Multiplikation zweier Zahlen gegeben durch die Addition der Winkel (und die Multiplikation der Beträge), die Division hingegen durch die Subtraktion der Winkel (und die Division der Beträge).

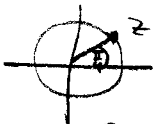


4.9 Bemerkung: Wir schreiben den Winkel immer im Bogenmaß.



Es ist $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Bsp: (a) Die Zahl $z = 1+i$ ist $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ in Polarkoordinaten, denn $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ und



(b) Die Zahl $z = i$ ist $z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ in Polarkoordinaten.

(c) Die Zahl $z = -2+2i$ ist $z = \sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$ in Polarkoordinaten.

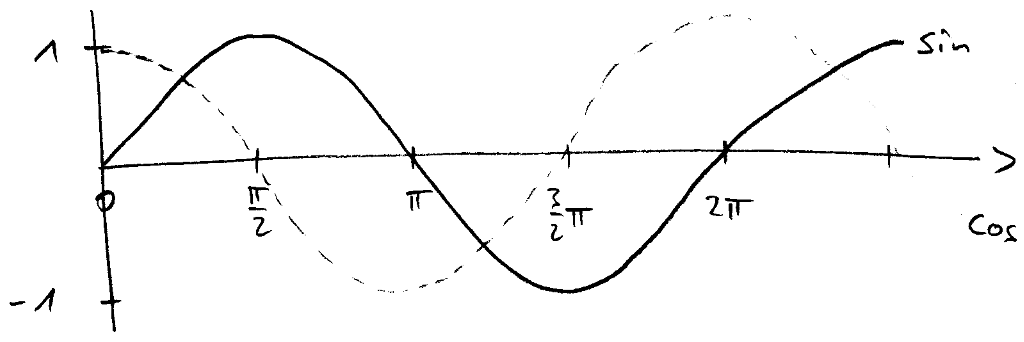
(d) Das Produkt von $z = 1+i$ und $w = -2+2i$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} z\cdot w &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\sqrt{8}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\cdot\sqrt{8}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{3}{4}\pi\right)\right) \\ &= 4\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) \end{aligned}$$

Andere Rechnung: $z\cdot w = (1+i)(-2+2i) = (-2-2) + i(2-2) = -4$

Das ist in Polarkoordinaten: $4\cdot(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

Beachte



Also

$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$	$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
$\sin(\pi) = 0$	$\cos(\pi) = -1$
$\sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$	$\cos(\frac{3}{2}\pi) = 0$

(e) Was ist $\frac{z}{w}$, wenn $z = 1+i$ und $w = i$?

In Polarkoordinaten gerechnet:

$$\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$$

Wir haben benutzt, dass Sinus und Cosinus periodisch sind, dass nämlich $\sin(2\pi+\varphi) = \sin(\varphi)$ und $\cos(2\pi+\varphi) = \cos(\varphi)$ ist.
Also $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)$.

(f) Um allgemein den Winkel φ aus der Formel $\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ zu bestimmen, benutzt man den Arcuscosinus. Der Arcuscosinus liefert allerdings nur Werte in $[0,\pi]$, weshalb man Zusatzüberlegungen über den richtigen Quadranten anstellen ~~muss~~.

1. Bsp: $z = -2 + \sqrt{12}\,i$. Dann $|z| = \sqrt{(-2)^2 + \sqrt{12}^2} = 4$ und
$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. Es ist $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$.
Da z im 2. Quadranten liegt und $\varphi = \frac{2}{3}\pi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ebenfalls, ist $z = 4\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$ in Polardarstellung.

2. Bsp: $z = -2 - \sqrt{12}\,i$. Dann $|z| = 4$ und $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, also wieder $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$. Nun liegt z jedoch im 3. Quadranten.
Also ist $\varphi = 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$.

(g) Auch das Komplexkonjugieren ist leicht in Polarkoordinaten:
Ist $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so ist $\bar{z} = |z|\left(\cos(2\pi-\varphi) + i\sin(2\pi-\varphi)\right)$

Bsp: $z = -2 + \sqrt{12}\,i$ bzw. $z = 4\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$
und $\bar{z} = -2 - \sqrt{12}\,i$ bzw. $\bar{z} = 4\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)$

4.10 Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$: In $\mathbb{C}$ ist jede quadratische Gleichung $(az^2+bz+c=0)$ lösbar – in $\mathbb{R}$ ist das nicht der Fall. Hier ist ein Verfahren zum Lösen solcher Gleichungen:
Wir wollen die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$az^2+bz+c=0$$ bestimmen, mit $a,b,c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

1.) Dividiere durch a, erhalte also $z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0$

2.) Quadratische Ergänzung. $z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0$ ist erfüllt, genau dann wenn

$$\underbrace{z^2+\frac{b}{a}z+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2} = -\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$ gilt.

3.) 1. Fall: $-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0$. Dann ist $z=-\frac{b}{2a}$ die einzige Lösung.

2. Fall: $-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \neq 0$. Schreibe dann diesen Term in Polarkoordinaten, also

$$-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Dann sind
$$z_1 = \sqrt{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)-\frac{b}{2a}$$
$$z_2 = \sqrt{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right)-\frac{b}{2a}$$
die Lösungen der Gleichung.

4.11 Beispiel: (a) $z^2+2z+(3-\sqrt{12}\,i)=0$. $\left(\begin{matrix}a=1\\ b=2\\ c=3-\sqrt{12}\,i\end{matrix}\right)$

Quadratische Ergänzung:
$$\underbrace{z^2+2z+1}_{=(z+1)^2} = \underbrace{-3+\sqrt{12}\,i+1}_{=-2+\sqrt{12}\,i}$$

Es ist $-(3-\sqrt{12}\,i)+\left(\frac{2}{2}\right)^2 \neq 0$, also
$-2+\sqrt{12}\,i$ in Polarkoordinaten: $-2+\sqrt{12}\,i = 4\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

Also $z_1 = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right)-1$

und $z_2 = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right)-1$ die Lösungen.

$\left(\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}\right.$, $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$, also $z_1=i\sqrt{3}$, $\left.z_2=-2-\sqrt{3}\,i\right)$

(b) $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Quadratische Ergänzung: $\underbrace{z^2 + 2z + 1}_{=(z+1)^2} = -5 + 1 = -4 = (-1)\cdot 4$

Also Lösungen $z+1 = 2i$ und $z+1 = -2i$, das heißt

$z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$.

(c) komplexe Eigenwerte. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Das charakteristische Polynom ist

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot E_2 - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 \\ 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda+1)^2 + 4$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = -1 + 2i$ und $\lambda_2 = -1 - 2i$, also hat diese Matrix zwei komplexe Eigenwerte.

(Die zugehörigen Eigenvektoren haben komplexwertige Einträge.)