§5 Folgen und Reihen

Führt man Messungen in einer bestimmten Sache durch, so kann es sein, dass sich die Daten mehr und mehr einem einzigen Wert annähern. Wenn man von einem natürlichen Gleichgewicht spricht, dann meint man damit oft einen Zustand, der sich bei gegebenen Umweltbedingungen allmählich einstellen wird oder schon eingestellt hat. Stört man dieses Gleichgewicht (bspw. Dezimierung einer Art durch eine Seuche), so kehrt der frühere Zustand nicht selten wieder ein, nach einer gewissen Zeit (Fressfeinde werden ebenfalls dezimiert, aus Futtermangel; die erste Art erholt sich also rasch wieder, Fressfeinde auch ...).

Solche Vorgänge beschreibt man mathematisch mit Hilfe von Konvergenz von Folgen. Das ist auch das grundlegende Hilfsmittel für Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integration.
(s. Vogt, S. 38)

5.1 **Definition**: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gegeben durch reelle Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$.

5.2 **Beispiel**: (a) $a_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(c) $a_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ ist.
Das ist die konstante Folge.

(d) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Untersucht man nun obige Folgen, so zeigt sich, dass sich manche einem bestimmten Wert annähern, andere nicht.

z.B. (a) $a_n = n$ wird immer größer

(b) $a_n = \frac{1}{n}$ nähert sich der Null an $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$

(c) $a_n = c$ bleibt immer gleich, „nähert" sich also der Zahl c.

(d) $a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ 1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$ pendelt immer zwischen 0 und 1 hin und her, nähert sich also keinem Wert.

5.3 **Definition**: (a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent** gegen einen Wert $a \in \mathbb{R}$, falls es für alle Zahlen $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ (Betrag) ist, für alle $n \geq N$. Das heißt, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nähert sich der Zahl a beliebig nah. Die Zahl a heißt dann der **Grenzwert** der Folge und wir schreiben auch $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$.
Eine Folge, die nicht konvergiert heißt **divergent**.

(5) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (uneigentlich) gegen unendlich, falls es zu jeder Zahl $M\in\mathbb{N}$ einen Index $N\in\mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > M$ für alle $n\geq N$ gilt. Entsprechend konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen minus unendlich, falls es zu jeder Zahl $M\in\mathbb{N}$ einen Index $N\in\mathbb{N}$ gibt mit $a_n < -M$ für alle $n\geq N$.

Wir schreiben dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $a_n \to \infty$, $n\to\infty$ (entsprechend $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) und sagen auch, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergiert.

5.4 Beispiel: (a) $a_n = n$. Ist $M\in\mathbb{N}$, so gilt für $N := M+1$, dass $a_n = n > M$, wann immer $n\geq N = M+1$ ist.
Also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, die Folge divergiert bestimmt gegen unendlich.

(b) $a_n = \frac{1}{n}$. Wir zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist. Ist dazu $\varepsilon>0$ gegeben, so wählen wir $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Ist dann $n\geq N$, so gilt $|a_n - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

(c) $a_n = c$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, denn für gegebenes $\varepsilon > 0$ und $N=1$ gilt: $|a_n - c| = |c-c| = 0 < \varepsilon$ für alle $n\geq N$.

(d) $a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ 1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$. Diese Folge ist divergent, denn gäbe es ein $a\in\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so müsste es z.B. für $\varepsilon = \frac{1}{10} > 0$ ein $N\in\mathbb{N}$ geben, so dass $|a_n - a| < \frac{1}{10}$ ist, für alle $n\geq N$.
Ist nun jedoch $n\geq N$ gerade, so ist $|a| = |a_n - a| < \frac{1}{10}$.
Andererseits ist $|\cancel{a}\,1-a| = |a_n - a| < \frac{1}{10}$ für ungerades $n\geq N$.
Ist $a\geq 0$, so ist also $0\leq a < \frac{1}{10}$ und $1-a < \frac{1}{10}$, andererseits $\frac{9}{10} < 1-a < \frac{1}{10}$. Das kann nicht sein.
Ist $a\leq 0$, so ist $-\frac{1}{10} < a \leq 0$ und $1 < 1-a < \frac{1}{10}$. Kann auch nicht sein.

5.5 Rechenregeln für lim: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, so gilt:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a+b$

Erklärung: Ist $\varepsilon>0$, so gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N_2$.
Für $N := \max(N_1, N_2)$ gilt dann
$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq \underbrace{|a_n-a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n-b|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$
für alle $n \geq N$. Also $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = a-b$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für jede Zahl $\lambda\in\mathbb{R}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls alle $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{a_n}) = \sqrt{a}$ falls alle $a_n \geq 0$ und $a \geq 0$

(f) Man kann ähnliche Aussagen für $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ treffen, allerdings muss man hier manchmal aufpassen, da ∞ spinnt.
$\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$ nicht immer gilt, wenn $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = \infty$.

5.6 Beispiel: (a) $a_n = \frac{n+5}{2n}$. Also $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{7}{4}$, $a_3 = \frac{4}{3}$, ... $a_{100} = \frac{21}{40}$.
Wir vermuten also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. Und tatsächlich:
Es gilt $a_n = \frac{n(1+\frac{5}{n})}{n\cdot 2} = \frac{1+\frac{5}{n}}{2} \to \frac{1}{2}$ für $n\to\infty$

Denn: $b_n := 1 \to 1$ nach 5.4(c). $c_n = \frac{5}{n} = 5\cdot\frac{1}{n} \to 5\cdot 0 = 0$ nach 5.4(b) und 5.5(c)
Also $b_n + c_n \to 1+0 = 1$ nach 5.5(a).
Somit $a_n \to \frac{1}{2}$ nach 5.5(d).

5.7 Quetschlemma: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen, so dass $a_n \le x_n \le b_n$ für alle $n \ge N$ (also ab einem gewissen Index) und gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x$, so konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

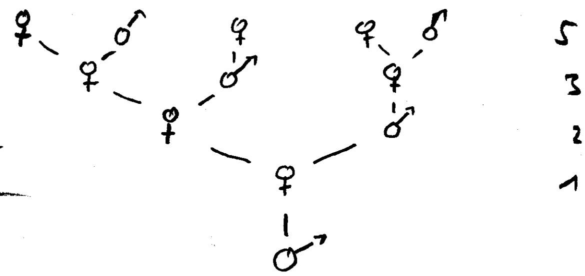
5.8 Beispiel: $x_n = \frac{\sin(n)}{n}$. Da $-1 \le \sin(x) \le 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$, ist $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin(n)}{n} \le \frac{1}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$, gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

Manche Zusammenhänge werden durch rekursiv definierte Folgen beschrieben.

Bsp.: Männliche Bienen (Drohnen) schlüpfen aus unbefruchteten Eiern, während aus befruchteten Eiern Weibchen schlüpfen.

Der Stammbaum einer Drohne ist

also ⟶



bzw.

Generation	weibl. Vorf.	männl. Vorf.	Gesamt (a_n)
1	1	0	1
2	1	1	2
3	2	1	3
4	3	2	5
5	5	3	8

Man erkennt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Anzahl der Vorfahren der Drohne in der n-ten Generation beschreibt, wobei $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \ge 2$, die Fibonacci-Folge.

5.9 Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *rekursiv definiert*, falls $a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}$ für $n \geq k$ bei fest gegebenen $c_1, \ldots c_k$, $k \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots a_{k-1} \in \mathbb{R}$.

In vielen Fällen kann man eine geschlossene Formel herleiten, wofür es sogar konkrete Verfahren gibt.

Zu 5.5 (f): Regeln mit Unendlich: 5-4b

(f1) $\lim a_n = \underset{(-\infty)}{\infty}$, $\lim b_n = \underset{(-\infty)}{\infty}$ $\Rightarrow$ $\lim (a_n + b_n) = \underset{(-\infty)}{\infty}$

(f2) $\lim a_n = \infty$, $\lim b_n = b \neq 0$ $\Rightarrow$ $\lim (a_n b_n) = \begin{cases} \infty & b>0 \\ -\infty & b<0 \end{cases}$

(f3) $\lim a_n = \underset{(-\infty)}{\infty}$ $\Rightarrow$ $\lim \frac{1}{a_n} = 0$

Zu 5.6: (b) $a_n = \dfrac{-n^3 + 3n - 5}{2n^2 + 3}$. Dann

$$a_n = \underbrace{\frac{n^3}{n^2}}_{= n \to \infty} \cdot \underbrace{\frac{-1 + \overbrace{\frac{3}{n^2}}^{\to 0} - \overbrace{\frac{5}{n^3}}^{\to 0}}{2 + \underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\to 0}}}_{\to -\frac{1}{2}} \longrightarrow -\infty$$

(c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Dann

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1)} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0} \cdot \overbrace{\frac{1}{\underbrace{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1} + 1}_{\to 1}}}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0$$

Eine besondere Form der Konvergenz von Folgen ist die von Reihen. Das sind im Grunde „unendliche Summen".

z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}}_{\frac{7}{4}}+\frac{1}{8}}_{\frac{15}{8}} + \ldots$ Wir vermuten, dass diese unendliche Summe den Wert 2 annimmt.

5.10 Definition: Ist $(a_n)_{n\in \mathbb{N}_0}$ ($\mathbb{N}\cup\{0\}$) eine Folge, so ist

$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ die Folge der n-ten Partialsummen.

Konvergiert $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, so nennt man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine (unendliche) Reihe und schreibt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$.

Ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so heißt die Reihe divergent.

5.11 Beispiel: (a) $a_n := \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$. Dann $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$

und da $s_n = \frac{2^{n+1}}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 2$, $n\to\infty$ (s. Blatt 7, $q=\frac{1}{2}$),

ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent mit Wert $s=2$.

(b) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ heißt geometrische Reihe. Nach Blatt 7

ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \underbrace{\frac{q^{n+1}}{1-q}}_{\to 0} \longrightarrow \frac{1}{1-q}$ falls $|q|<1$.

Für $|q|\geq 1$ divergiert die geometrische Reihe.

(c) Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert!

$$\underbrace{1}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{\geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \ldots + \tfrac{1}{16}}_{\geq \frac{8}{16} = \frac{1}{2}} + \ldots$$

(d) Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, denn

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \quad \text{für } n \to \infty$$

S.12 Rechenregeln: Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, so gilt $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} b_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Das gilt i.A. jedoch nicht für Produkte oder Quotienten!

S.13 Bemerkung: Oft interessiert uns bloß ob die Reihe überhaupt konvergiert – und nicht wogegen. Für diese Frage ist der Startindex der Reihe irrelevant (wir können auch $\sum_{k=5}^{\infty} a_k$ oder $\sum_{k=\ell}^{\infty} a_k$ untersuchen). Für den Wert der Reihe ist der Anfang natürlich relevant, für die Konvergenz hingegen nicht.

Wir wollen im Folgenden einige Kriterien kennenlernen, wann eine Reihe konvergiert.

5.14 <u>Nullfolgenkriterium</u>: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge. Die Umkehrung gilt jedoch nicht!
(denn: wenn wir nicht immer weniger addieren, konvergiert die Reihe nicht)

<u>Bsp.</u>: (a) $a_n = \frac{n+5}{2n}$ aus Bsp. 5.6(a) konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.
Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{2n}$ divergent.
(b) $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist trotzdem divergent. (5.11(c))

5.15 <u>Definition</u>: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u>, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz).
Die Umkehrung ist im Allgemeinen nicht richtig.

5.16 <u>Majoranten-/Minorantenkriterium</u>:
(a) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folgen mit $|a_n| \leq b_n$ und konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, also auch konvergent.
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ heißt dann (konvergente) <u>Majorante</u> von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
(b) Gilt hingegen $a_n \geq b_n \geq 0$ und ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent („divergente <u>Minorante</u>") so divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

<u>Bsp.</u>: (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, denn $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$ und $2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist konvergent.
(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ oder allgemeiner $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ mit $\alpha \geq 2$ konvergiert, da $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2}$.
(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergiert, da $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

5.17 Quotientenkriterium: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und gibt es ein $0<q<1$, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$ gilt (für alle $n\in\mathbb{N}_0$), so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und also konvergent.

(genauere Aussage im „unendl. kleinen Fehler“ Aufgaben: [illegible] Majorante)

Äquivalent kann man überprüfen, ob $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ist.

Achtung: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ bzw. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ reichen nicht aus!

Bsp.: (a) Betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^5}{3^k}$. Die Reihe konvergiert, denn

$$\left|\frac{\frac{(k+1)^5}{3^{k+1}}}{\frac{k^5}{3^k}}\right| = \frac{(k+1)^5}{3^{k+1}}\cdot\frac{3^k}{k^5} = \frac{1}{3}\overbrace{\Big(1+\underbrace{\tfrac{1}{k}}_{\to 0}\Big)^5}^{\to 1} \longrightarrow \frac{1}{3} < 1, \quad n\to\infty$$

(b) Für $a_n = \frac{1}{n}$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1}\cdot n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$

bzw. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert!

(c) Ist $x\in\mathbb{R}$ fest, so ist mit $a_n = \frac{x^n}{n!}$ $\quad (n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1)$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0 \text{ für } n\to\infty.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ konvergiert also und wird mit $\exp(x)$ bezeichnet. Man kann sehen, dass $\exp(x) = e^x$ ist – die e-Funktion hat also eine Darstellung als Reihe.

5.18 Leibnizkriterium: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit

(i) $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

(ii) $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ („monoton fallend")

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent (aber nicht unbedingt absolut konvergent).

(Idee: Zu $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ wird ein bisschen addiert, dann etwas weniger abgezogen, noch weniger wieder addiert etc.
Der Wert der Reihe „pendelt" sich ein.)

Bsp.: Die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert, denn $a_n = \frac{1}{n}$ erfüllt (i) bis (iii). Die Reihe ist jedoch nicht absolut konvergent, denn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.