§6 Funktionen und Stetigkeit

Mit Funktionen können wir bestimmte Prozesse und Verläufe beschreiben. Der Begriff der Stetigkeit formalisiert hierbei den Umstand, wenn „kleine Änderungen nur kleine Änderungen" bewirken. Wir lernen zunächst einige grundlegende Funktionen kennen.

6.1 Polynome und gebrochen rationale Funktionen:

(a) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_0, \dots a_n \in \mathbb{R}$ fest, so heißt

$$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \underline{\text{Polynomfunktion}}$$

vom Grad n (wenn $a_n \neq 0$)

(b) Sind $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ Polynomfunktionen,

so heißt $f: \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

<u>gebrochen rationale Funktion.</u>

Beachte, dass diese Funktion nur für $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$ definiert ist.

<u>Bsp.:</u> (a) $p_1(x) = 2x$, $p_2(x) = 5x^2 - 2$, $p_3(x) = x^9$ sind Polynome

(b) $f_1(x) = \frac{2x}{5x^2 - 2}$, $f_2(x) = \frac{x-3}{(x-1)^2}$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$

Sind gebrochen rationale Funktionen mit Definitionsbereichen $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{\frac{2}{5}}\}$ für f_1, $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ für f_2, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für f_3.

6.2 Exponentialfunktion:

Ist $x \in \mathbb{R}$ und ist $a_n = \frac{x^n}{n!}$, so gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

(Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ also und wird mit $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ bezeichnet.

Die Funktion $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \exp(x)$ heißt <u>Exponentialfunktion</u> und hat folgende Eigenschaften:

(1) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

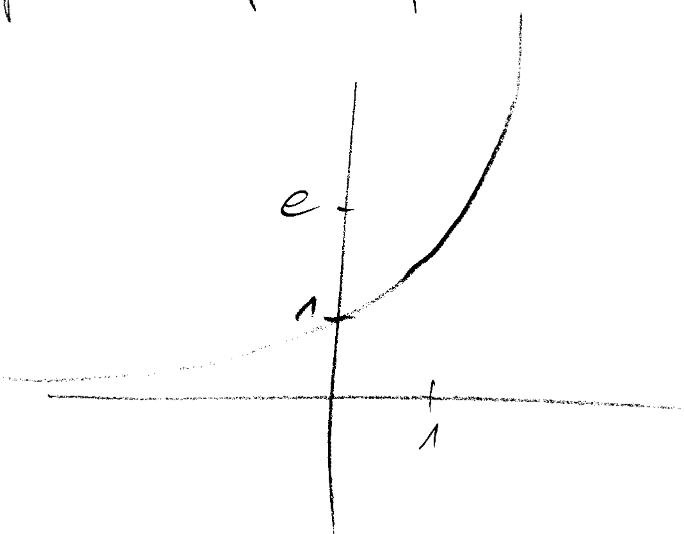
(2) $\exp(0) = 1$ und $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$ (mit (1))

(3) $\exp(x) > 0$

(4) exp ist <u>streng monoton wachsend</u>, also gilt $\exp(x) < \exp(y)$ wenn immer $x < y$ ist.

(5) $\exp(1) = e = 2{,}71\ldots$ ist die bekannte Eulersche Zahl

Der Graph der Exponentialfunktion ist



6.3 Logarithmusfunktion:

Der Bildbereich der exp-Funktion ist das Intervall $(0,\infty)$ und hieraus existiert auch eine Umkehrfunktion, die **Logarithmusfunktion** $\log : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

(1) $\log(\exp(x)) = x$ und $\exp(\log(x)) = x$

Beachte: Der Logarithmus ist nur für positive $x \in (0,\infty)$ definiert

(2) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

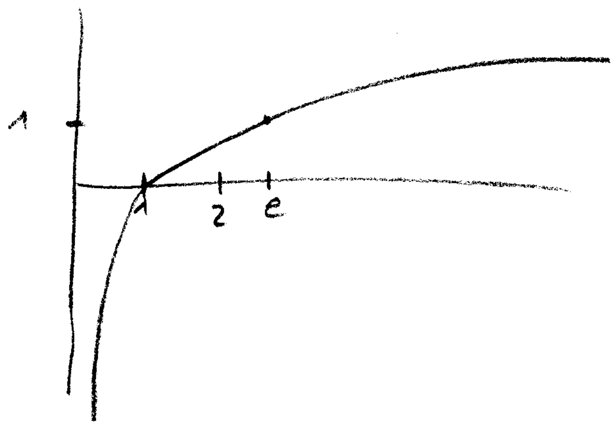
(denn: $\exp(\log(x)+\log(y)) \overset{6.2(1)}{=} \exp(\log x)\exp(\log y) = xy$

Also ist $\log(xy) = \log(\exp(\log(x)+\log(y))) = \log(x)+\log(y)$)

(3) $\log(1) = 0$ und $\log(e) = 1$ (nach 6.2(2) und 6.2(5))

(4) $\log$ ist streng monoton wachsend

Der Graph ist



6.4 Bemerkung: Ist $a>0$, so heißt $f_a(x)=a^x=\exp(x\cdot\log a)$ mit $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Exponentialfunktion zur Basis a.

Es gilt: $a^0=1$, $a^1=a$, $e^x=\exp(x)$, $1^x=1$, $a^{x+y}=a^x a^y$, $(a^x)^y=a^{xy}$.

Die Umkehrfunktion von $f_a(x)=a^x$ ist $\log_a:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, falls $a\neq 1$.

Es gilt: $\log_a(1)=0$, $\log_a(a)=1$, $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$, $\log_a(x^r)=r\log_a(x)$

6.5 Bemerkung: Die Exponentialfunktion beschreibt sehr oft Wachstum bzw. Verfall einer Sache.

Bsp.: Nach dem Tod eines Lebewesens zerfällt das radioaktive Kohlenstoff-Isotop C_{14} mit einer Halbwertszeit von 5370 Jahren. Wie alt ist eine Mumie mit auf 35% gesunkenem C_{14}-Gehalt?

Der C_{14}-Gehalt nach t Jahren ist $G(t)=\overset{\text{lebender Mensch}}{G_0}\cdot a^t$. Was ist a?

Weiß $G(t+5370)=\frac{1}{2}G(t)$, also

$$G_0\cdot a^t\cdot a^{5370}=G_0 a^{t+5370}=G(t+5370)=\tfrac{1}{2}G(t)=\tfrac{1}{2}G_0\cdot a^t$$

somit $a^{5370}=\frac{1}{2}$, d.h. $5370\log(a)=\log(a^{5370})=\log(\frac{1}{2})$.

Dann ist $\log(a)=\dfrac{\log(0{,}5)}{5370}$, also $a=\exp\left(\dfrac{\log(0{,}5)}{5370}\right)$.

Suche nun t mit $G(t)=0{,}35\cdot G_0$, also $G_0\cdot a^t=G(t)=0{,}35\cdot G_0$

somit $a^t=0{,}35$, d.h. $t\log(a)=\log(a^t)=\log(0{,}35)$

und daher $t=\dfrac{\log(0{,}35)}{\log(a)}=\dfrac{\log(0{,}35)}{\log(0{,}5)}\cdot 5370\approx 8133$

Die Mumie ist also 8133 Jahre alt.

6.6 Definition: Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereich einer Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ und ist $a \in D$, dann schreiben wir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Dies können wir auch für $a = \pm\infty$ definieren oder für $a \in \mathbb{R}$, die „in D approximiert werden können".

Bsp: (1) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

1.) ∞ ist approximierbar und für $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} \underset{\substack{\uparrow \\ (5.5.5)}}{=} 0$

Somit ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

2.) 0 ist ebenfalls approximierbar, aber für $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = -\frac{1}{n}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, aber $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-n) = -\infty$.

Also existiert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht.

3.) Für $5 \in \mathbb{R}$ ist $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \frac{1}{5}$, denn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$ ergibt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \frac{1}{5}$.

(2) Ist $g: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{x-3}{(x-1)^2}$, so ist $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -\infty$, denn für $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ ist $g(x_n) = \underbrace{\frac{1}{(x_n-1)^2}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{(x_n - 3)}_{\to -2} \longrightarrow -\infty$ für $n \to \infty$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ existiert nicht, denn mit $x_n = 2\pi n$ und $y_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, aber $\sin(x_n) = 0$ und $\sin(y_n) = 1$ für alle n, also $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(x_n) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty}\sin(y_n)$.

(4) $f: \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x^2-1}$. Für $x \to -1$ ist $f(x) = \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-4}{x-1} \longrightarrow \frac{5}{2}$. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert hingegen nicht.

(5) Für $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit $h(x)=\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$ ist $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$, denn für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

ist $\underbrace{-\sqrt{x_n}}_{\to 0} \le h(x_n) \le \underbrace{\sqrt{x_n}}_{\to 0}$ (denn $-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1$)

Nach dem Quetschlemma also auch $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)=0$.

§ 7 Rechenregeln: Wie für Folgen (5.5) haben wir:

(a) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f(x))=\lambda\lim\limits_{x\to a} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ falls $g(x)\neq 0$

(d) entsprechendes auch für $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ in manchen Fällen

(e) „Kettenregel": Sind $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ und $\lim\limits_{x\to b} g(x)=c$,

so ist $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=c$

Bsp für (e): $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\exp(-x^2+x)$.

Es ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, denn $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^2+x)=-\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x)=0$.

Ist nun $a \in D$ für $f: D \to \mathbb{R}$, so kann man fragen, ob $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ gilt. Das gilt genau dann, wenn f in a stetig ist.

6.8 <u>Definition</u>: Ist $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$, dann heißt f <u>stetig</u> in a, falls $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ gilt.
Ist f in allen Punkten $a \in D$ stetig, so heißt f <u>stetig (auf D)</u>.

<u>Bsp</u>: (a) Alle Polynomfunktionen bzw. allgemeiner: alle gebrochen rationalen Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich, also beispielsweise $f(x) = 2x$ oder $f(x) = 5x^2 - 2$ auf $\mathbb{R}$, oder $f(x) = \frac{2x}{5x^2-2}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{\frac{2}{5}}\}$.

(b) Ist $a \in \mathbb{R}$ fest, so ist $f(x) = x^a$ stetig

(c) Ist $a > 0$, so ist $f(x) = a^x$ stetig

(d) log, exp, sin, cos sind stetig

(e) Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Hintereinanderausführungen von stetigen Funktionen ergeben wieder stetige Funktionen. Allerdings kann sich dabei der Definitionsbereich ändern.

Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\exp\left(\frac{x-3}{\sin x}\right) \cdot 4x^3 - 3}{2^x + \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{3}{x^2}\right)}$

ist stetig.

6.9 <u>Bemerkung</u>: Gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und $x_n < a$, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ ist, so bezeichnen wir mit $\lim_{x\nearrow a} f(x) = c$ den <u>linksseitigen Grenzwert</u> von f an der Stelle a, entsprechend $\lim_{x\searrow a} f(x) = d$ für den rechtsseitigen.

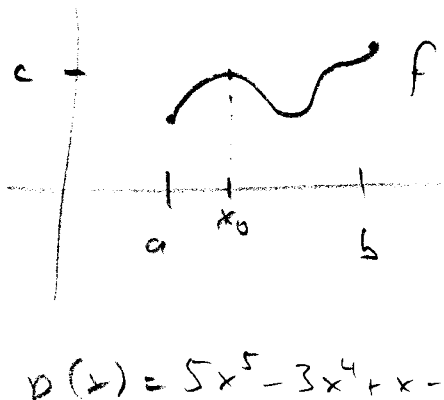
Ist $\lim_{x\nearrow a} f(x) = \lim_{x\searrow a} f(x) = f(a)$, so ist f stetig in a

(„linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert $\overset{=\text{Funktionswert}}{}$, dann f stetig")

<u>Bsp.</u>: $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$ ist nicht stetig in 0, da $\lim_{x\nearrow 0} h(x) = 0$, $\lim_{x\searrow 0} h(x) = 1$.

6.10 <u>Zwischenwertsatz</u>: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$, so dass $f(a) \leq c \leq f(b)$ oder $f(a) \geq c \geq f(b)$, so gibt es einen Punkt $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = c$.

Die Funktion f nimmt also alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



(f muss bei c vorbei um von $f(a)$ nach $f(b)$ zu gelangen)

<u>Bsp.</u>: Ist $p(x) = 5x^5 - 3x^4 + x - 1$ (oder allgemeiner ein Polynom ungeraden Grades), so besitzt p mindestens eine Nullstelle (in $\mathbb{R}$). Denn da $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ ist, muss es $a, b \in \mathbb{R}$ geben mit $p(a) < 0 < p(b)$. Nach 6.10 gibt es also ein $x_0 \in [a,b]$ mit $p(x_0) = 0$.