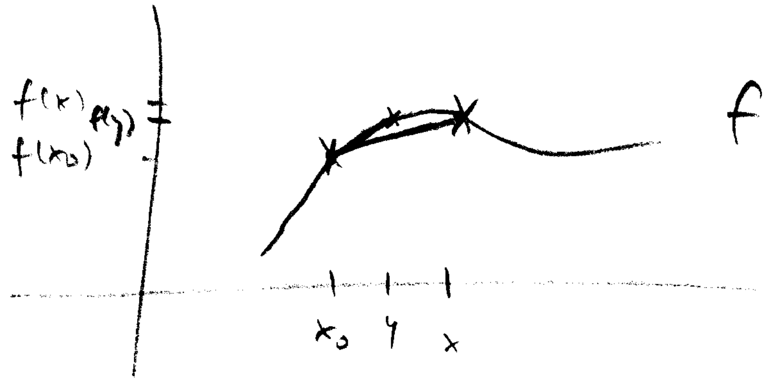
§7 Differentialrechnung

Die Differentialrechnung beschäftigt sich mit der Annäherung von Funktionen durch Tangenten. Anschaulich gesprochen entspricht das der „Steigung in einem Punkt".



Der Quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ bestimmt die Steigung von f zwischen x und x_0. Lässt man x gegen x_0 laufen, so erhält man die „Steigung" von f in x_0.

7.1 <u>Definition</u>: Ist $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ eine Funktion auf einem Intervall (a,b) und ist $x_0\in(a,b)$, so heißt f <u>differenzierbar</u> in x_0, falls der Grenzwert $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Wir bezeichnen ihn dann mit $f'(x_0)$. Die Funktion heißt <u>differenzierbar</u> auf (a,b), falls f in jedem Punkt $x_0\in(a,b)$ differenzierbar ist. Die Funktion $f':(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ heißt dann die <u>Ableitung</u> von f.

7.2 Beispiel: (a) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=c$ eine konstante Funktion, so gilt für jedes $x_0\in\mathbb{R}$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0\xrightarrow{x\to x_0}0$.
Also existiert $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und $f'(x_0)=0$.

(b) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, so gilt für jedes $x_0\in\mathbb{R}$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1\xrightarrow{x\to x_0}1,\quad \text{so gilt } f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1$$

(c) Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, so gilt für jedes $x_0\in\mathbb{R}$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=x+x_0\xrightarrow{x\to x_0}2x.$$

Daher ist $f'(x)=2x$.

(f) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ ist nicht differenzierbar in $x_0=0$, da für $x_n=\frac{1}{n}$ und $y_n=-\frac{1}{n}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, aber

$$\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=\frac{\frac1n}{\frac1n}=1\xrightarrow{n\to\infty}1\quad\text{und}\quad\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0}=\frac{\frac1n}{-\frac1n}=-1\xrightarrow{n\to\infty}-1.$$

Also existiert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht.

7.3 Bemerkung: Ist $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0\in(a,b)$, so auch stetig in $x_0\in(a,b)$, denn es gilt:

$$f(x)-f(x_0)=\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x\to x_0}f'(x_0)}\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{\xrightarrow{x\to x_0}0}\xrightarrow{x\to x_0}0,\quad\text{also }\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Also „diffbar $\Rightarrow$ stetig" – die Umkehrung ist jedoch falsch (siehe Beispiel 7.2 (d): $x\mapsto|x|$ ist stetig in 0, aber hier nicht differenzierbar)

(d) Allgemeiner gilt für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, dass $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ ist. Es gilt sogar $g'(x)=a\cdot x^{a-1}$, wenn $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^a$, $a\in\mathbb{R}$ ist.

Bsp: $f(x)=x^8$, $f'(x)=8\cdot x^7$, $g(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$, $g'(x)=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

$h(x)=\sqrt{x}=x^{\frac12}$, $h'(x)=\frac12 x^{-\frac12}=\frac12\frac{1}{\sqrt{x}}$

(e) $\sin'(x)=\cos(x)$, $\cos'(x)=-\sin(x)$, $\exp'(x)=\exp(x)$

7.4 Rechenregeln:

(a) Linearität. Sind $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist auch $f+g:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit $(f+g)'=f'+g'$. Ist $\lambda\in\mathbb{R}$, so ist $\lambda f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit $(\lambda f)'=\lambda f'$.

Bsp: • $h(x)=2x+3=a\cdot f(x)+g(x)$, wobei $f(x)=x$, $g(x)=3$, $a=2$.
Also $h'(x)=a\cdot f'(x)+g'(x)=2\cdot 1+0=2$ (7.2(a),(b)).

• Oder $h(x)=\sin(x)+\exp(x)$, dann $h'(x)=\cos(x)+\exp(x)$

(b) Produktregel. Sind $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist auch $f\cdot g:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

Bsp: • $(\sin(x)\cos(x))'=\cos^2(x)-\sin^2(x)$

• $h(x)=x^2=f(x)\cdot g(x)$ mit $f(x)=g(x)=x$. Dann $h'(x)=x+x=2x$

• $h(x)=x^3=f(x)\cdot g(x)$ mit $f(x)=x$, $g(x)=x^2$. Dann $h'(x)=x^2+2x^2=3x^2$

(c) Quotientenregel. Sind $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar und ist $g(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$, so ist auch $\frac{f}{g}:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$

Bsp: • $h(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$. $h'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

(d) Kettenregel. Sind $f:(c,d)\to\mathbb{R}$ und $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar und ist $g((a,b))\subseteq(c,d)$, so ist auch $f\circ g:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f\circ g(x)=f(g(x))$ differenzierbar mit $(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot f'$,
also $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Bsp: • $h(x)=\exp(x^3-1)$, $f(x)=\exp(x)$, $g(x)=x^3-1$.
Dann $h'(x)=\exp(x^3-1)\cdot 3x^2$

• $h(x)=(\sin(x)\cdot\cos(x))^5$. $h'(x)=5\cdot(\sin(x)\cos(x))^4\cdot(\cos^2(x)-\sin^2(x))$

(e) Ableitung von Umkehrfunktionen. Ist $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar und ist $f'(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$, so hat f eine Umkehrfunktion $f^{-1}: D\to(a,b)$, wobei $D=f((a,b))$.
Es gilt dann $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Idee: Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, gilt $(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x$. Nach der Kettenregel also $(f\circ f^{-1})'(x)=f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)$. Andererseits ist ja $h'(x)=1$, wenn $h(x)=x$. Also $f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)=1$.
Daraus ergibt $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Bsp: $\log:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp:\mathbb{R}\to(0,\infty)$. Also ist mit $f(x)=\exp(x)$, $f^{-1}(x)=\log(x)$:
$$\log'(x)=\frac{1}{\exp'(\log(x))}=\frac{1}{\exp(\log(x))}=\frac{1}{x}\quad\text{für } x\in(0,\infty)$$

7.5 L'Hospital: Wir interessieren uns für Ausdrücke der Form $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, falls $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ oder $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$.

Bsp $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=?$ Wissen: $\lim_{x\to\infty}x=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$

Trick wie bei $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+(\frac{1}{x})\to 0\;\to 1}{x\to\infty}\longrightarrow 0$ nicht möglich.

Aber: Sind $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$ und $c\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ in (a,b) approximierbar.
(a) Ist $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=0$ oder $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=\infty$
(b) und existiert (!) $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
dann ist $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Bsp: (1) $\lim_{x\to\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} x = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty$ existiert.

Also $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty$, denn $\exp' = \exp$, $f' = 1$ für $f(x) = x$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$ $\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} x = 0$ und

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$ existiert. Also $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = ?$ $\lim_{x\to\infty} x^2 = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, aber

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = ?$ Erneute Anwendung von L'Hospital liefert

$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$, also $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

(1. Schritt: $\lim \frac{2}{e^x}$ existiert, also auch $\lim \frac{2x}{e^x}$, im 2. Schritt: $\lim \frac{x^2}{e^x}$)

(4) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$ für jedes $\alpha > 0$

$\lim_{x\to -\infty} (e^x \cdot x^n) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ und $\lim_{x\to 0} (\log x \cdot x^\alpha) = 0$ für jedes $\alpha > 0$

7.6 Monotonie:

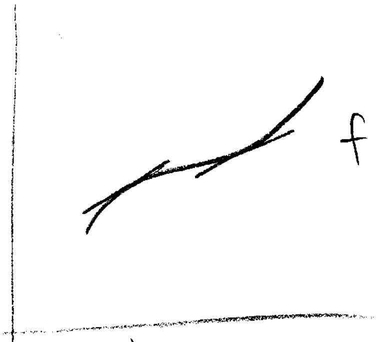
Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann:

(a1) f ist genau dann monoton wachsend auf (a,b) (d.h. $f(x) \leq f(y)$ für alle $x \leq y$), wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$

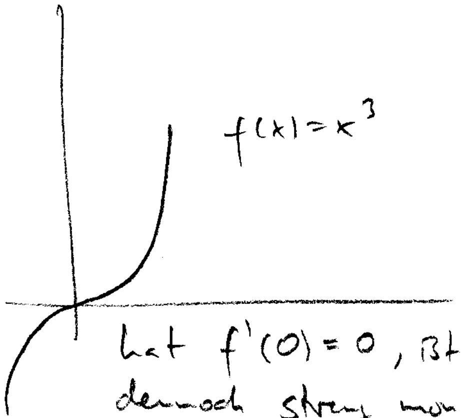
(a2) f ist genau dann monoton fallend auf (a,b) (d.h. $f(x) \geq f(y)$ für alle $x \leq y$), wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$

(b1) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f streng monoton wachsend (d.h. $f(x) < f(y)$ für alle $x < y$)

(b2) Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f streng monoton fallend (d.h. $f(x) > f(y)$ für alle $x < y$)



hat $f' \geq 0$, also mon. wachsend



hat $f'(0)=0$, ist aber dennoch streng mon. wachsend

Achtung: Die Umkehrung von (b1) und (b2) gilt nicht: Es gibt Funktionen, die streng monoton wachsen, aber $f'(x)=0$ tritt auf. (s.o.)

7.7 Definition: Ist $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar und ist $x_0\in(a,b)$, dann:

(a) Ist $f(x_0)\geq f(x)$ für alle $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ (also „in einer kleinen Umgebung von x_0") für ein $\delta>0$, so heißt x_0 lokales Maximum von f.

(b) Ist $f(x_0)\leq f(x)$ für alle $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ und ein $\delta>0$, so heißt x_0 lokales Minimum von f.

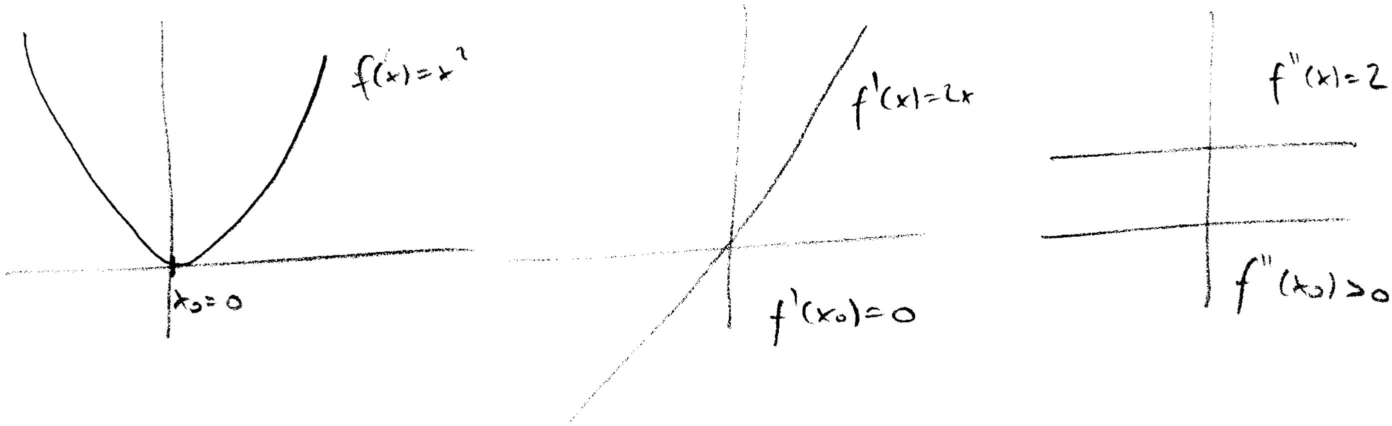
(c) Hat f in x_0 ein lokales Minimum oder Maximum, so heißt x_0 lokale Extremstelle von f.

(d) Gilt $f(x_0)\geq f(x)$ sogar für alle $x\in(a,b)$, so liegt ein globales Maximum vor (entspr. globales Minimum, globales Extremum)

7.8 Satz: Ist $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar (zweimal) und liegt $x_0\in(a,b)$ nicht auf dem Rand, dann:

(a) Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0)=0$.
(Lokale Extrema können also nur an den Stellen vorliegen, an denen die Ableitung verschwindet – das sind jedoch lediglich mögliche Stellen)

(b) Ist $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0$, so ist x_0 ein lokales Minimum von f.
Ist $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0$, so ist x_0 ein lokales Maximum von f.
Ist $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)=0$, so ist i.A. keine Aussage möglich.



<u>Bsp:</u> $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Dann $f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

($f(x)=(x^2+1)^{-1}$, dann Kettenregel)

Also $f'(x)>0$ für $x\in(-\infty,0)$, somit f streng monoton wachsend auf $(-\infty,0)$
und $f'(x)<0$ für $x\in(0,\infty)$, also f streng mon. fallend auf $(0,\infty)$.

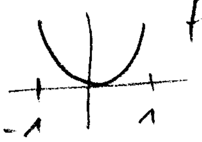
Da $f'(0)=0$, könnte hier ein lokales Extremum vorliegen.

Da $f''(x)=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$ und $f''(0)=-2<0$ hat f in 0 tatsächlich ein lokales Extremum, nämlich ein Maximum.

7.9 <u>Bemerkung:</u> Ist $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Intervall definiert und stetig, so besitzt f ein globales Minimum und ein globales Maximum. Ist f zusätzlich differenzierbar, so können diese an den Stellen $x_0=a$ oder $x_0=b$ (auf dem Rand) oder an Stellen $x_0\in(a,b)$ mit $f'(x_0)=0$ vorliegen.

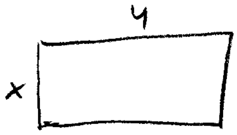
Liegt ein globales Extremum auf dem Rand, muss <u>nicht</u> $f'(x_0)=0$ gelten!

<u>Bsp.:</u>



$f(x)=x^2$ hat ein globales Maximum an den Stellen $x_0=-1$ und $x_0=1$, aber $f'(-1)\neq 0$, $f'(1)\neq 0$.

7.10 Extremwertaufgabe: Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang $U > 0$ maximalen Flächeninhalt?



$U = 2x + 2y$, also $y = \frac{U}{2} - x$

Fläche $= x \cdot y$

Somit ist die Fläche in Abhängigkeit von x (y ist durch U und x bestimmt) gegeben durch $F: [0, \frac{U}{2}] \to \mathbb{R}$, $F(x) = x \cdot (\frac{U}{2} - x)$.

Wann ist also F maximal? (Globales Maximum)

$F'(x) = \frac{U}{2} - 2x$. Also $F'(x) = 0 \iff x = \frac{U}{4}$.

Nach 7.9 besitzt F ein globales Maximum, das nur an den Randpunkten $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{U}{2}$ oder an der Stelle $x_3 = \frac{U}{4}$ mit $F'(x_3) = 0$ liegen kann.

Da $F(x_1) = 0$, $F(x_2) = 0$ und $F(x_3) = \frac{U}{4} \cdot (\frac{U}{2} - \frac{U}{4}) = \frac{U^2}{16}$ ist, ist F also bei x_1 und x_2 minimal (das „Rechteck" ist dann nur eine Linie) und bei x_3 maximal.

Für $x = \frac{U}{4}$ ist $y = \frac{U}{2} - \frac{U}{4} = \frac{U}{4}$, also $x = y$, somit ist das Rechteck ein Quadrat.