§9 Differentialgleichungen

Phänomene, bei denen Größen in einem Änderungsverhalten zueinander stehen können oft mit Hilfe von Differentialgleichungen beschrieben werden (Bewegungsgleichungen, Schwingungen oder Elektrodynamik in der Physik, Wachstum, Strömungen oder Evolution in der Biologie, die Kinetik von Reaktionen in der Chemie, ...).

Die Idee hierbei ist immer: Ein Prozess ist durch eine Funktion y (in Abhängigkeit der Zeit) beschrieben, die wiederum durch eine Gleichung bestimmt ist, in der sowohl y selbst als auch Ableitungen von y auftauchen.

Wir werden im Folgenden verschiedene Typen von Differentialgleichungen kennen lernen.

9.1 Beispiel: (a) Wachstumsverhalten einer Bakterienkultur. Nehme an, dass der Zuwachs $y'(t)$ proportional zur Anzahl $y(t)$ der zum Zeitpunkt t vorhandenen Bakterien ist, also

$$y'(t) = a\,y(t) \quad , \; t \geq 0, \; a > 0 \text{ Proportionalitätsfaktor}$$

Ebenso: radioaktiver Zerfall y (dann $a < 0$)

(b) Eine Kugel der Masse m schwingt an einer Feder. Die Auslenkung $y(t)$ vom Ruhepunkt zum Zeitpunkt t ist zu bestimmen.
Man nimmt an, dass die Kraft, die die Kugel zurück in Ruhelage zieht proportional zur Auslenkung y ist. Da $F = m a$, $a(t) = y''(t)$ die Beschleunigung, ist die DGL hier:

$$m\,y''(t) = -k\,y(t) \quad , \; k > 0 \text{ Konstante der Feder}$$

9.2 Definition: (a) Eine (gewöhnliche) **Differentialgleichung** (=DGL) **erster Ordnung** ist eine Gleichung $y'(t) = F(t, y(t))$ wobei $F: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist.
Eine Funktion $y: I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine **Lösung** obiger DGL, falls y differenzierbar ist und $(t, y(t)) \in D$ für alle $t \in I$ gilt und außerdem $y'(t) = F(t, y(t))$ ist (für alle $t \in I$).

(b) Solche Lösungen hängen oft von einem Anfang ab.
Ein **Anfangswertproblem** ist eine DGL (z.B. $y'(t) = F(t, y(t))$) zusammen mit einer Bedingung $y(t_0) = y_0$, die einen Anfangswert $(t_0, y_0) \in D$ fixiert. Eine **Lösung** eines Anfangswertproblems ist dann eine Lösung y der DGL, die $y(t_0) = y_0$ erfüllt.

(c) Alle Lösungen einer DGL zu bestimmen heißt, alle Lösungen aller möglichen Anfangswertprobleme zu bestimmen.

9.3 Beispiel: (a) Zu $y'(t) = a\,y(t)$ ist $F(t, x) = ax$ mit $D = \mathbb{R}^2$.
Ist $c \in \mathbb{R}$ fest, so ist $y_c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y_c(t) = ce^{at}$ eine Lösung, denn y_c ist differenzierbar, $(t, y_c(t)) \in \mathbb{R}^2$ und $y_c'(t) = ace^{at} = ay_c(t)$.
Zu einem Anfangswert $y(0) = c$ ist y_c eine Lösung.

(b) Zu $my''(t) = -ky(t)$ ist mit $y_c(t) = ce^{at}$ **keine** Lösung gegeben, da $y_c''(t) = \underbrace{a^2}_{>0} y_c(t)$, wir suchen aber $y''(t) = \underbrace{-\frac{k}{m}}_{<0} y(t)$.

Lösung: $y(t) = \cos(\mu t) + \sin(\mu t)$ mit $\mu = \sqrt{\frac{k}{m}}$, denn

$$y'(t) = -\mu \sin(\mu t) + \mu \cos(\mu t)$$

$$y''(t) = -\mu^2 \cos(\mu t) - \mu^2 \sin(\mu t) = -\mu^2 y(t) = -\frac{k}{m} y(t)$$

Gibt es denn immer Lösungen? Wie findet man sie? Sind sie eindeutig?

9.4 Satz (Picard-Lindelöf): Ist $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $F: D \to \mathbb{R}$ in jeder Variablen stetig differenzierbar, so gibt es zu jedem Paar $(t_0, y_0) \in D$ ein Intervall I, so dass $t_0 \in I$ ist und eine Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = F(t, y(t))$ und $y(t_0) = y_0$ existiert. Ist $\tilde{y}: \tilde{I} \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung, so stimmen y und $\tilde{y}$ auf $I \cap \tilde{I}$ überein.

In vielen Fällen gibt es also eine Lösung, die „in der Nähe" von t_0 sogar eindeutig ist.

In speziellen Fällen gibt es sogar konkrete Verfahren.

9.5 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.

Ist $F: D \to \mathbb{R}$ aus Def. 9.2 der Form $F(t,x) = f(t) g(x)$ mit $f: I \to \mathbb{R}$ und $g: J \to \mathbb{R}$, so hat die DGL getrennte Variablen, also $y'(t) = f(t) g(y(t))$ mit $y(t_0) = y_0$ ist zu lösen.

Wir nehmen an, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J$ gilt.

Lösungsidee: Integriere $\frac{y'(s)}{g(y(s))} = f(s)$ über dem Intervall $[t_0, t]$,

also $\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))} ds = \int_{t_0}^{t} f(s) ds$. Nach der Substitutionsregel ist:

$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))} ds = \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{1}{g(x)} dx = B(y(t))$, nach dem Hauptsatz der D-I-Rechnung.

Kann man nun B invertieren, so erhält man $y(t)$ aus

$$B(y(t)) = \int_{t_0}^{t} f(s) ds.$$

Verfahren: 1.) Berechne $A(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$

$$B(z) = \int_{y_0}^{z} \frac{1}{g(x)}\,dx$$

2.) Invertiere die Funktion $B: J \to \mathbb{R}$, finde also $B^{-1}: \tilde{J} \to J$ mit $B(B^{-1}(x)) = B^{-1}(B(x)) = x$.

(Das geht, da $g>0$ oder $g<0$ ist, also ist B streng monoton wachsend bzw. fallend)

3.) Berechne die Lösung $y(t) = B^{-1}(A(t))$ und bestimme den Definitionsbereich von y.

Bsp: (a) $y'(t) = a\,y(t)$ mit $y(0) = c$. Hier $f(t) = a$, $g(t) = t$, $t_0 = 0$. $t>0$

1.) $A(t) = \int_0^t f(s)\,ds = at$, $B(z) = \int_c^z \frac{1}{x}\,dx = \log z - \log c$

2.) $B^{-1}(x) = c e^x$ ist Inverses zu B, denn

$$B^{-1}(B(z)) = c e^{B(z)} = c e^{\log z} \cdot e^{-\log c} = c \cdot e^{\log z} \cdot \frac{1}{e^{\log c}} = c \cdot z \cdot \frac{1}{c} = z$$

$$B(B^{-1}(z)) = z$$

3.) $y(t) = B^{-1}(A(t)) = c e^{A(t)} = c e^{at}$ (s. Bsp. 9.3(a))

(b) $y'(t) = \frac{1}{t} e^{-y(t)}$ mit $y(t_0) = y_0$, $t_0 > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Also $y'(t) = f(t) g(y(t))$ mit $f(t) = \frac{1}{t}$, $g(x) = e^{-x}$.

1.) $A(t) = \int_{t_0}^t f(s)\,ds = \log t - \log t_0$, $B(z) = \int_{y_0}^z e^x\,dx = e^z - e^{y_0}$

2.) $B^{-1}: (-e^{y_0}, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $B^{-1}(z) = \log(z + e^{y_0})$ ist Inverses

(weil $z = B(B^{-1}(z)) = e^{B^{-1}(z)} - e^{y_0}$, also $e^{B^{-1}(z)} = z + e^{y_0}$)

3.) $y(t) = B^{-1}(A(t)) = \log((\log t - \log(t_0)) + e^{y_0})$

mit $I = (t_0 e^{-e^{y_0}}, \infty)$

(Bedingungen an I: $t>0$, da $\log t$ vorkommt

$\log t - \log(t_0) + e^{y_0} > 0$, da $\log(\ldots)$ vorkommt

also $\log t > \log(t_0) - e^{y_0}$, dann exp anwenden)

9.6 Lineare DGL erster Ordnung:

Betrachten wir nun DGL, bei der noch eine Funktion b hinzu addiert wird. Dafür vereinfachen wir $g(x)$ zu $g(x)=\mathrm{id}(x)=x$.

Eine DGL der Form $$y'(t)=f(t)y(t)+b(t)$$ mit stetigen Funktionen $f, b: I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt <u>lineare DGL erster Ordnung</u>. Sie heißt <u>homogen</u>, falls $b(t)=0$ für alle $t\in I$ ist und <u>inhomogen</u> sonst.

(a) <u>homogene LDGL</u>: Für $y'(t)=f(t)y(t)$ kennen wir nach 9.5 bereits ein Lösungsverfahren – es ist eine DGL mit getrennten Variablen ($g(x)=x$). Habe auch $y(t_0)=y_0$.

Dann ist wie gehabt $A(t)=\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$. Für B gilt

$$B(z)=\int_{y_0}^{z}\frac{1}{g(x)}\,dx=\int_{y_0}^{z}\frac{1}{x}\,dx=\log z-\log y_0 \quad \text{und} \quad B^{-1}(x)=y_0e^{x}$$

(s. Bsp (a) in 9.5)

Somit $y(t)=B^{-1}(A(t))=y_0e^{A(t)}$

Zusammengefasst: Ist $G: I\longrightarrow\mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$, so ist $y(t)=\left(y_0\cdot e^{-G(t_0)}\right)\cdot e^{G(t)}$ die Lösung zu $y'(t)=f(t)y(t)$ mit $y(t_0)=y_0$.

<u>Bsp:</u> $y'(t)=\cos(t)y(t)$, $y(t_0)=y_0$.

Dann $y(t)=\left(y_0\cdot e^{-\sin(t_0)}\right)e^{\sin(t)}$ Lösung.

Für $t_0=0$, $y_0=1$, also $y(t)=e^{\sin(t)}$

(5) Inhomogene LDGL:

Ist $y'(t) = f(t)y(t) + b(t)$ gegeben und ist $y_s: I \to \mathbb{R}$ eine Lösung dieser DGL, ist weiterhin $y_h: I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der zugehörigen homogenen DGL $y'(t) = f(t)y(t)$, so ist $y(t) = y_s(t) + y_h(t)$ eine Lösung von $y'(t) = f(t)y(t) + b(t)$.
Man bekommt so sogar alle Lösungen dieser inhomogenen DGL.
Warum ist y eine Lösung?

$$y'(t) = y_s'(t) + y_h'(t) = (f(t)y_s(t) + b(t)) + f(t)y_h(t)$$
$$= f(t)y(t) + b(t).$$

Andererseits: Ist y irgendeine Lösung der inhomogenen DGL, so ist $y - y_s$ eine Lösung der homogenen DGL, also $y - y_s = y_h$ für eine Lösung y_h:

$$f(t)(y(t) - y_s(t)) = (f(t)y(t) + b(t)) - (f(t)y_s(t) + b(t)) = y'(t) - y_s'(t)$$

Lösungsverfahren für inhomogene LDGL 1. Ordnung $y'(t) = f(t)y(t) + b(t)$:

1.) Bestimme alle Lösungen $y_{h,c}(t) = c\,e^{A(t)}$ von $y'(t) = f(t)y(t)$ (wie in (a))
2.) Finde eine spezielle Lösung y_s von $y'(t) = f(t)y(t) + b(t)$
3.) Dann sind alle Lösungen der inhomogenen DGL durch $y_c(t) = y_s(t) + y_{h,c}(t)$ gegeben.

Aber wie finden wir eine spezielle Lösung y_s?
Idee: $y_s(t) = c(t)y_h(t)$, wobei $c: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.
Dann

$$f(t)y_s(t) + b(t) = y_s'(t) = c'(t)y_h(t) + c(t)y_h'(t)$$
$$= c'(t)y_h(t) + c(t)f(t)y_h(t) = c'(t)y_h(t) + f(t)y_s(t)$$

Also $b(t) = c'(t)y_h(t)$, also $c(t) = \int \frac{b(s)}{y_h(s)}\,ds$.

Verfahren: Finde Stammfunktion c zu $\frac{b(t)}{y_h(t)}$. Dann $y_s(t) = c(t)y_h(t)$ eine spezielle Lösung.

Bsp: Löse $y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + t$, also $f(t) = \frac{1}{t}$, $b(t) = t$.

1.) $\log$ ist eine Stammfunktion von f, also $y_h(t) = e^{\log t} = t$ Lösung der homogenen DGL $y'(t) = \frac{1}{t} y(t)$.

2.) Stammfunktion von $\frac{b(t)}{y_h(t)} = \frac{t}{t} = 1$? $c(t) = t$

Also $y_s(t) = c(t) y_h(t) = t^2$ eine spezielle Lösung

(tatsächlich: $y_s'(t) = 2t$ und $\frac{1}{t} y_s(t) + t = 2t$)

3.) Also alle Lösungen gegeben durch $y_c(t) = y_s(t) + y_{h,c}(t)$

$$= t^2 + ct, \quad c \in \mathbb{R}$$

9.7 Lineare DGL zweiter Ordnung:

Eine lineare DGL zweiter Ordnung ist eine DGL der Form

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = b(t) \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \; b: I \to \mathbb{R}$$

Bsp: Wie in Bsp. 9.1(b) $y''(t) + \frac{k}{m} y(t) = 0$

Lösung für den homogenen Fall $y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = 0$:

Idee: Versuche $y(t) = e^{\lambda t}$. Dann

$$0 = y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta) y(t)$$

Dies zeigt, dass wir die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ lösen sollten. Hierfür gibt es drei Fälle.

1.) Die Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Dann sind $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ die Lösungen der DGL, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Bsp: $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$, also $\alpha = -3$, $\beta = 2$ und die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ mit Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Also sind $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ alle Lösungen. Hat man zwei Anfangswerte (z.B. $y(0) = 1$, $y(1) = -1$) gegeben, so kann man c_1, c_2 hieraus bestimmen. $\begin{pmatrix} 1 = y(0) = c_1 + c_2 \\ -1 = y(1) = c_1 e + c_2 e^2 \end{pmatrix}$

2.) Die Gleichung hat eine doppelte reelle Lösung $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.
Dann sind $y(t) = (c_1 + tc_2)e^{\lambda_0 t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der DGL.

<u>Bsp:</u> Löse $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$ mit $y(0) = -3$, $y'(0) = 4$.
Da $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ $(= (\lambda+2)^2)$ die doppelte Lösung $\lambda_0 = -2$ hat,
ist die allgemeine Lösung $y(t) = (c_1 + tc_2)e^{-2t}$.
Aus $-3 = y(0) = c_1$ und $4 = y'(0) = -2c_1 + c_2$
folgt $c_1 = -3$ und $c_2 = -2$ $\quad (y'(t) = (c_2 - 2c_1 - 2tc_2)e^{-2t})$
Zu diesem Anfangswertproblem also $y(t) = (-3 - 2t)e^{-2t}$

3) Die Gleichung hat eine komplexe Lösung $\lambda_1 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.
Dann ist auch $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ eine Lösung und $\lambda_1 = \alpha_0 + i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.
Dann sind $y(t) = e^{\alpha_0 t}(c_1\cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t))$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
alle Lösungen der DGL.

<u>Bsp:</u> $y''(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0$, also char. Gl.: $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$
mit Lösungen $\lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,i$, $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}\,i$ und also
$y(t) = \underbrace{e^{0\cdot t}}_{=1}(c_1\cos(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t) + c_2\sin(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t))$ alle Lösungen (s. Bsp. 9.3)

<u>Inhomogener Fall:</u> Auch hier kann man wieder alle Lösungen der inhomogenen DGL aus $y = y_s + y_h$ gewinnen, wobei y_s eine Lösung der inhomogenen DGL und y_h eine der zugehörigen homogenen ist.

9.8 <u>Bemerkung:</u> (a) Das Lösen von homogenen LDGL (für $k \geq 3$)
$$y^{(k)}(t) + a_1 y^{(k-1)}(t) + \ldots + a_{k-1}y'(t) + a_k y(t) = 0$$
verläuft analog wie für $k=2$. Löse zunächst die charakteristische Gleichung $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0$ und erhalte hierdurch die Lösungen.

(b) Es gibt auch Systeme von DGLs. Sind diese linear, so muss man Eigenwerte einer Matrix bestimmen anstatt einer charakteristischen Gleichung (Lineare Algebra + DGL).