



Übungen zur Vorlesung Mathematik für
Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2012/2013

Blatt 10

Abgabetermin: Freitag, 11.01.2012

Aufgabe 1

(15+5=20 Punkte)

Sei

$$T_0 = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Re}(z)| \leq 1 \text{ und } 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 2\}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei weiter

$$T_n = \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Re}(z)| \leq 8 + n - \operatorname{Im}(z) \text{ und } 2n \leq \operatorname{Im}(z) \leq 8 + n\}.$$

(a) Skizzieren Sie - möglichst vor dem 24.12.2012 - die Menge

$$T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup \dots$$

(b) Färben Sie die umschlossene Menge mit Ihnen passend erscheinenden Farben. Verzieren Sie das Objekt wohlwollend und summen bzw. brummen Sie dabei Ihr Lieblingsweihnachtslied. Vergessen Sie nicht, von Zeit zu Zeit "Hohoho!" auszurufen.

Aufgabe 2

(15+5=20 Punkte)

Der Weihnachtsmann macht sich mit seinem Rentier Rudolph auf den Weg zu den Wichteln, um den Schlitten mit den Geschenken abzuholen. Wie jeder weiß, ist der Weihnachtsmann nicht mehr der Jüngste. Er läuft mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h zu dem 6 km entfernten Wichtelhaus. Sein Rentier hingegen, frisch und ausgeruht, springt mit 6 km/h durch den Wald. Sie starten gleichzeitig. Um sich mal so richtig auszutoben, läuft Rudolph schnurstracks zum Wichtelhaus, dreht dort um, läuft zurück zum Weihnachtsmann, dreht wieder um, läuft zum Wichtelhaus und so weiter. Wieviel Kilometer ist Rudolph wohl gelaufen, wenn der Weihnachtsmann am Wichtelhaus ankommt? Die Zeit die das Rentier zum Wenden braucht, soll vernachlässigt werden (Rudolph ist in der Tat äußerst wendig und flink).

(a) Lösen Sie die Aufgabe zunächst, indem Sie eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} s_k$ aufstellen, bei der s_k die Länge des Wegstücks ist, das Rudolph beim k -ten Mal vom Weihnachtsmann hin und zurück zum Wichtelhaus zurücklegt. Berechnen Sie dann den Wert der Reihe.

(b) Kann man die Aufgabe auch einfacher lösen?

(bitte wenden)

Aufgabe 3

(20 Punkte)

Um den großen Schlüsselbund nicht das ganze Jahr mit sich herum schleppen zu müssen hat Oberwichtel Manni ihn im Sommer auf der Wiese hinter der Wichtelhütte vergraben und sich eine genaue Lagebeschreibung verfasst: "Gehe von der Sonnenblume direkt zur Wichtelhütte, dann gleichviele Schritte im rechten Winkel nach links und stecke dort die erste Fahne. Gehe nun von der Sonnenblume zum großen Tannenbaum, dann im rechten Winkel genau so weit nach rechts und stecke dort die zweite Fahne. Dann liegt der Schlüssel genau in der Mitte zwischen den beiden Fahnen."

Natürlich sind Wichtelhütte und Tannenbaum noch vorhanden, doch die Sonnenblume ist längst verblüht und die ganze Wiese ist mit einer dicken Schneeschicht überzogen. Notgedrungen rät Manni die Position der Sonnenblume und folgt dann seiner Lagebeschreibung. Tatsächlich findet er sofort den Schlüssel. Ist das glücklicher Zufall?

(Hinweis: Fassen Sie alle Punkte (Sonnenblume, Hütte, Tannenbaum, Fahnen und Schlüsselbund) als komplexe Zahlen auf und berechnen Sie den Schlüsselfundort. Multiplikation einer komplexen Zahl mit i bewirkt eine Drehung um 90 Grad linksherum, Multiplikation mit $-i$ bewirkt eine Drehung um 90 Grad rechtsherum.)

*Wir wünschen Ihnen Frohe Weihnachten,
einen guten Rutsch
und viel Erfolg im Jahr 2013!*