UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Moritz Weber
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2012/2013

Blatt 11 Abgabetermin: Freitag, 18.01.2012

Aufgabe 1 (3+4+3=10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und geben Sie jeweils den größtmöglichen Bereich an, auf dem die Funktion stetig ist.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x+1 & ;\ x \in (-\infty, 0] \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & ;\ x \in (0, \pi) \\ x & ;\ x \in [\pi, \infty) \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & ;\ x \in (-\infty, 1) \\ -2 & ;\ x = 1 \\ 2\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) & ;\ x \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)} & ;\ x \neq 0 \\ 0 & ;x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2 (5+5=10 Punkte)

(a) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein Punkt $\xi \in [0,1]$ existiert mit $f(\xi) = \xi$. Ein solches ξ nennt man Fixpunkt von f.

(*Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion* $g : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - x$ *an.*)

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\exp(x) = 3x$$

(mindestens) eine Lösung $x \in (0,1)$ hat.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 **(3+3+4=10 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in jedem Punkt x_0 ihres Definitionsbereiches auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung. Verwenden Sie dazu nur die Definition der Differenzierbarkeit aus der Vorlesung.

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x-1}$.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$.

(c) $h : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$.

(*Hinweis: Erweitern Sie den Differenzenquotienten mit* $\sqrt{x} + \sqrt{x_0}$.)

Aufgabe 4 **(1,5+1,5+1,5+1,5+2+2=10 Punkte)**

Bestimmen Sie jeweils den maximal möglichen Definitionsbereich D_i und berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, 6$:

$$(a)\ f_1(x) = x^2 \ln(1 + x^2), \quad (b)\ f_2(x) = \frac{\exp(x)}{x^2}, \quad (c)\ f_3(x) = (\tan(x))^2$$

$$(d)\ f_4(x) = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}}, \quad (e)\ f_5(x) = \cos\left(\frac{xe^x}{1 - x}\right), \quad f_6(x) = x^x.$$

(*Hinweis: Zur Erinnerung:* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *für* $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.)
