



Übungen zur Vorlesung Mathematik für  
Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2012/2013

Blatt 12

Abgabetermin: Freitag, 25.01.2012

**Aufgabe 1**

**(3+3+4=10 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x(1 - \cos(x))}$ .

---

Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar, dann heißt ein Punkt  $x_0 \in I$  Wendepunkt, falls die zweite Ableitung  $f''$  von  $f$  in  $x_0$  einen Vorzeichenwechsel hat. Insbesondere ist  $f''(x_0) = 0$ .

**Aufgabe 2**

**(10 Punkte)**

Die potentielle Energie eines (kräftefreien) zweiatomigen Moleküls kann näherungsweise durch das Lenard-Jones-Potential

$$V : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x) = V_0 \left[ \left(\frac{a}{x}\right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{x}\right)^6 \right],$$

als Funktion des Kernabstandes  $x$  der beiden in ihm enthaltenen Atome ausgedrückt werden. Hierbei sind  $a$  und  $V_0$  positive Konstanten. Skizzieren Sie den Graphen von  $V$ . Ermitteln Sie dazu durch eine Kurvendiskussion alle benötigten Informationen (Nullstellen, Monotonieverhalten, Extremstellen, Wendepunkte, Grenzwerte bei 0 und  $\infty$ ).

**Aufgabe 3**

**(5+5=10 Punkte)**

(a) Der Energieverbrauch von Zugvögeln, die mit der Geschwindigkeit  $v > 0$  fliegen, wurde durch Pennycuik mit der Formel

$$E(v) = A \rho v + \frac{G}{B \rho v}$$

beschrieben. Hierbei ist  $\rho$  die Dichte der Luft,  $G$  das Gewicht des Vogels und  $A = \text{angeströmte Fläche} \cdot \text{geometrischer Faktor}$ .

Skizzieren Sie die Funktion  $E$  und bestimmen Sie das Minimum.

**(bitte wenden)**

- (b) Der Energieverbrauch eines Wellensittichs im Flug in  $\frac{J}{g \cdot km}$  sei (in leichter Abwandlung der Formel aus (a)) durch die Formel

$$E(v) = \frac{1}{v} (0,31(v - 35)^2 + 92)$$

beschrieben. Dabei wird die Geschwindigkeit  $v$  in  $km/h$  gemessen. Welche Geschwindigkeit ist am energieeffizientesten?

---

#### Aufgabe 4

(10 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^b x^2 dx$$

mit einer festen Zahl  $b > 0$ . Benutzen Sie dazu die äquidistante Zerlegung  $\binom{jb}{n}_{j=0}$ .

(Hinweis: Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.)

---