UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Moritz Weber
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2012/2013

Blatt 14* Abgabetermin: -

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (- Punkte)

(a) Sei $y'(t) = -\frac{1}{t}\frac{1+y(t)^2}{y(t)}$ und $y(1) = 2$, d.h. $f(t) = -\frac{1}{t}$ und $g(t) = \frac{1+t^2}{t}$. Wir verwenden die Vorgehensweise zur Bestimmung einer Lösung für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen aus der Vorlesung. Wir erhalten

$$A(t) = \int_1^t \frac{-1}{s} ds = [-\log(s)]_1^t = -\log(t)$$

und

$$\begin{aligned} B(z) &= \int_2^z \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_2^z = \frac{1}{2}\log(1+z^2) - \frac{1}{2}\log(5). \end{aligned}$$

Invertieren liefert

$$B^{-1}(t) = \sqrt{5e^{2t} - 1}$$

(beachte dabei $B^{-1}(A(1)) = 2$). Also erhält man als Lösung

$$y(t) = B^{-1}(A(t)) = \sqrt{\frac{5}{t^2} - 1}$$

für $t \in \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$.

(b) Sei $y'(t) = -\frac{1}{t}\frac{1+y(t)^2}{y(t)}$ und $y(-1) = -2$, d.h. $f(t) = -\frac{1}{t}$ und $g(t) = \frac{1+t^2}{t}$. Wir verwenden die Vorgehensweise zur Bestimmung einer Lösung für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen aus der Vorlesung. Wir erhalten

$$A(t) = \int_{-1}^t \frac{-1}{s} ds = [-\log|s|]_{-1}^t = -\log|t|$$

und

$$\begin{aligned} B(z) &= \int_{-2}^z \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_{-2}^z = \frac{1}{2}\log(1+z^2) - \frac{1}{2}\log(5). \end{aligned}$$

Invertieren liefert

$$B^{-1}(t) = -\sqrt{5e^{2t} - 1}$$

(beachte dabei $B^{-1}(A(-1)) = -2$). Also erhält man als Lösung

$$y(t) = B^{-1}(A(t)) = -\sqrt{\frac{5}{t^2} - 1}$$

für $t \in \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$.

(c) Sei $y'(t) = e^{y(t)} \sin(x)$ mit $x \in [0, 2\pi)$ und $y(\pi) = -\log(2)$, d.h. $f(t) = \sin(x)$ und $g(t) = e^t$. Ist $x = 0$ oder $x = \pi$, so ist $y'(t) = 0$, also y konstant $y(t) = -\log(2)$ für $t \in \mathbb{R}$. Andernfalls verwenden wir die Vorgehensweise zur Bestimmung einer Lösung für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen aus der Vorlesung. Wir erhalten

$$A(t) = \int_\pi^t \sin(x) ds = [\sin(x)s]_\pi^t = \sin(x)(t - \pi)$$

und

$$B(z) = \int_{-\log(2)}^z e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_{-\log(2)}^z = -e^{-z} + 2.$$

Invertieren liefert

$$B^{-1}(t) = -\log(-t + 2).$$

Falls $x \in (0, \pi)$, erhalten wir

$$y(t) = B^{-1}(A(t)) = -\log(2 - \sin(x)(t - \pi))$$

für $t \in \left(-\infty, \frac{2}{\sin(x)} + \pi\right)$ als Lösung. Ist $x \in (\pi, 2\pi)$, erhalten wir

$$y(t) = B^{-1}(A(t)) = -\log(2 - \sin(x)(t - \pi))$$

für $t \in \left(\frac{2}{\sin(x)} + \pi, \infty\right)$ als Lösung.

Aufgabe 2 (- Punkte)

(a) Die Differentialgleichung ist linear und homogen mit getrennten Variablen mit $f(t) = 2t - 5$ und $g(t) = t$. Das Verfahren für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen liefert

$$A(t) = \int_{t_0}^t (2s - 5) ds = [s^2 - 5s]_{t_0}^t = t^2 - 5t - t_0^2 + 5t_0$$

und

$$B(z) = \int_{y_0}^z \frac{1}{x} dx = [\log |x|]_{y_0}^z = \log \left|\frac{z}{y_0}\right|.$$

Invertieren liefert

$$B^{-1}(t) = y_0 e^t.$$

Wir erhalten als Lösung

$$y(t) = B^{-1}(A(t)) = y_0 e^{t^2 - 5t - t_0^2 + 5t_0}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Ist speziell $t_0 = 3$ und $y_0 = 1$, so erhält man

$$y(t) = e^{t^2 - 5t + 6}$$

für $t \in \mathbb{R}$.

(b) Die Differentialgleichung ist linear und homogen mit getrennten Variablen mit $f(t) = \frac{t}{t^2+4}$ und $g(t) = t$. Das Verfahren für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen liefert

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{s}{s^2+4} ds = \left[\frac{1}{2}\log(s^2+4)\right]_{t_0}^{t} = \log\left(\sqrt{\frac{t^2+4}{t_0^2+4}}\right)$$

und

$$B(z) = \int_{y_0}^{z} \frac{1}{x} dx = [\log|x|]_{y_0}^{z} = \log\left|\frac{z}{y_0}\right|.$$

Invertieren liefert

$$B^{-1}(t) = y_0 e^t.$$

Wir erhalten als Lösung

$$y(t) = y_0\sqrt{\frac{t^2+4}{t_0^2+4}}$$

für $t \in \mathbb{R}$.

(c) Die Differentialgleichung ist linear und inhomogen. Die Gleichung (†) entspricht dem homogenen Anteil von $(\star)$, also sind $y(t) = y_h(t) = y_0\sqrt{\frac{t^2+4}{t_0^2+4}}$ die Lösungen des homogenen Anteils. Laut Vorlesung erhält man eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch den Ansatz $y_s(t) = c(t)y_h(t)$ und Variation der Konstanten $c(t)$. Man erhält

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{s}{y_h(s)} ds = \frac{\sqrt{t_0^2+4}}{y_0} \int_{t_0}^{t} \frac{s}{(s^2+4)^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= \frac{\sqrt{t_0^2+4}}{y_0} \left[(s^2+4)^{\frac{1}{2}}\right]_{t_0}^{t} = \frac{\sqrt{t_0^2+4}}{y_0}\left(\sqrt{t^2+4} - \sqrt{t_0^2+4}\right), \end{aligned}$$

also $y_s(t) = \sqrt{t^2+4}\left(\sqrt{t^2+4} - \sqrt{t_0^2+4}\right)$ als spezielle Lösung von $(\star)$. Alle Lösungen von $(\star)$ erhält man nun aus

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t) = \sqrt{t^2+4}\left(\sqrt{t^2+4} - \sqrt{t_0^2+4}\right) + y_0\sqrt{\frac{t^2+4}{t_0^2+4}}.$$

Ist speziell $t_0 = \sqrt{5}$ und $y_0 = 18$, so erhält man

$$y(t) = 3\sqrt{t^2+4} + (t^2+4)$$

für $t \in \mathbb{R}$.