UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Moritz Weber
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2012/2013

Blatt 4 Abgabetermin: Freitag, 16.11.2012

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

(a) Benutzen Sie den Satz über die Eigenschaften der Determinante zur Beantwortung der folgenden Fragen.

(i) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \\ 101 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1000 \\ 1001 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

(ii) Für welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & -1 & x+1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & x & 4 \end{pmatrix}$$

invertierbar?

(b) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen und geben Sie an, ob sie invertierbar sind:

$$(i) \quad \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 3 & \frac{3}{16} \end{pmatrix},$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -5 \\ -1 & -3 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 5 & -1 & -5 \\ -5 & 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 3 **(7+3=10 Punkte)**

Betrachtet werden die folgenden linearen Abbildungen $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $f_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad f_B\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrizen A und B an, mit denen sich diese Abbildungen beschreiben lassen. Sind die Matrizen A bzw. B invertierbar? Haben die entsprechenden homogenen LGS $Ax = 0$ bzw. $Bx = 0$ eine eindeutige Lösung?

(b) Gegeben sind zusätzlich die Vektoren

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sind die Gleichungen $Ax = c$, $Ax = d$, $Bx = c$ und $Bx = d$ lösbar, und wenn ja, wie viele Lösungen besitzen sie? Sie brauchen die Lösung(en) nicht in allen Fällen explizit zu berechnen.

Aufgabe 4 **(4+6=10 Punkte)**

Benutzen Sie die Cramer'sche Regel um die folgenden linearen Gleichungssysteme zu lösen:

$$(a) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

$$(b) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right).$$

Prüfen Sie dabei zunächst ob Sie die Cramersche Regel überhaupt anwenden dürfen.
