



Übungen zur Vorlesung Mathematik für
Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2012/2013

Blatt 6

Abgabetermin: Freitag, 30.11.2012

Aufgabe 1

(1+1+1+2+1+1+1+2=10 Punkte)

Seien $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = 4 + 3i$ komplexe Zahlen. Berechnen Sie

- (a) $x_1 = z_1 + z_2 - z_3$,
- (b) $x_2 = z_1 \cdot z_4$,
- (c) $x_3 = \frac{z_2}{z_3}$,
- (d) $x_4 = \operatorname{Re}(i^n)$, wobei $n \in \mathbb{Z}$,
- (e) $x_5 = \operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2)$,
- (f) $x_6 = \overline{(z_1 + z_4)}$,
- (g) $x_7 = |i^n|$, wobei $n \in \mathbb{Z}$,
- (h) $x_8 = |z_2 \cdot z_4|$.

(Hinweis: zu (d) und (g): Beachten Sie $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$.)

Aufgabe 2

(3+7=10 Punkte)

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $z \in \mathbb{C}$:

- (i) $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,
- (ii) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$,
- (iii) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (falls $z \neq 0$).

(Hinweis: Schreiben Sie dazu $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.)

(b) Seien $u, v, w, z \in \mathbb{C}$ gegeben. Berechnen Sie die fehlenden Größen und ergänzen Sie die folgende Tabelle:

	Argument	Betrag	Realteil	Imaginärteil
u	$\frac{7\pi}{6}$	$\sqrt{12}$		
v	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{3}$		
w			2	2
z			$-\sqrt{3}$	1
uv				
$\frac{u}{v}$				
w^4				

(bitte wenden)

Aufgabe 3**(2+2+3+3=10 Punkte)**

- (a) Wir suchen die Lösungen für w für die Gleichung $w^2 = y$, wobei $y \in \mathbb{C}$ durch

$$y = |y|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

gegeben ist. Begründen Sie, warum

$$w_1 = \sqrt{|y|} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \text{ und } w_2 = -w_1$$

die beiden Lösungen der Gleichung sind. Begründen Sie auch, warum man w_2 als

$$w_2 = \sqrt{|y|} \left(\cos\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right) \right)$$

schreiben kann.

- (b) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen über $\mathbb{C}$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
- 1.) Finden Sie eine quadratische Ergänzung, um die Gleichung in die Form $w^2 = y$ zu bringen. Schreiben Sie $y \in \mathbb{C}$ dabei in Polardarstellung.
 - 2.) Schließen Sie von den Lösungen von $w^2 = y$ auf die Lösungen für z .
 - 3.) Schreiben Sie die Lösungen für z in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(i) \quad z^2 = -3i,$$

$$(ii) \quad z^2 - 4z + 29 = 0,$$

$$(iii) \quad z^2 - z(2i + 2\sqrt{2}) + 1 + i(16 + 2\sqrt{2}) = 0.$$

Aufgabe 4**(2+3+5=10 Punkte)**

Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen alle Eigenwerte in $\mathbb{C}$ und jeweils die Menge aller zugehörigen Eigenvektoren in $\mathbb{C}^2$ bzw. $\mathbb{C}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 5 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
