UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Moritz Weber
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2012/2013

Blatt 7 Abgabetermin: Freitag, 07.12.2012

Aufgabe 1 (4+2+4=10 Punkte)

(a) Untersuchen Sie für welche $q \in \mathbb{R}$ die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = q^n$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(*Hinweis: Betrachten Sie die folgenden Fälle:* $q = 1$, $q = 0$, $q = -1$, $q > 1$, $0 < q < 1$, $-1 < q < 0$ *und* $q < -1$ *in der angegebenen Reihenfolge. Schreiben Sie im Fall* $q > 1$ $q = 1+t$ *mit einem* $t > 0$ *und verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung* $(1+t)^n \geq 1 + nt$ *die für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*)

(b) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

für $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dabei bedeuted $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + \dots q^n$.

(*Hinweis: Betrachten Sie* $(1-q)\left(\sum\limits_{k=0}^{n} q^k\right)$.)

(c) Untersuchen Sie die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} q^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $q \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie im Fall von Konvergenz ihren Grenzwert.

Aufgabe 2 (2+1+2+1+2+2=10 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $\lambda \cdot a$.

(b) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(i) $a_n = \frac{2n^2-n+7}{3n^3+7}$.

(ii) $b_n = (n^4-1)\frac{1}{n^3+2n^2+2}$.

(iii) $c_n = \frac{n^3+4n^2-3n+7}{2n^3-182n^2+3}$.

(iv) $d_n = (-1)^n n^2$.

(v) $e_n = \frac{n!}{n!+(n-1)!} - n$.

(bitte wenden)

"Quetschlemma": *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen derart, dass ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$a_n \leq x_n \leq b_n \quad (n \geq n_0).$$

Dann gilt: Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen den gleichen Grenzwert* $x \in \mathbb{R}$ *konvergieren, so konvergiert auch* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* x.

Aufgabe 3 **(2+4+4=10 Punkte)**

Benutzen Sie das Quetschlemma um die Konvergenz der nachstehenden Folgen zu begründen und berechnen Sie jeweils den Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{1}{n!}$.

(b) $b_n = \sqrt{4n^2 + n + 1} - 2n$.

(c) $c_n = \frac{(-1)^n 12+4}{n}$.

Aufgabe 4 **(5+5=10 Punkte)**

Ein Kind bekommt ein Meerschweinchenpaar geschenkt. Alle vier Monate wirft das Weibchen Junge. Jedes Meerschweinchen frisst jeden Monat 2 kg Körnerfutter. Es treten keine Todesfälle ein. Beschreiben Sie die Anzahl der Meerschweinchen des Kindes in der n-ten Generation. Wie viele Meerschweinchen hat das Kind nach 2 Jahren? Wie viel Futter hat es in den zwei Jahren verbraucht? Unterscheiden Sie dabei die beiden folgenden Szenarien:

(a) Das Kind behält von jedem Wurf zwei Meerschweinchen gleichen Geschlechts, die es zusammen in einen eigenen Käfig setzt, und verschenkt die restlichen.

(*Hinweis: Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.)

(b) Das Kind behält von jedem Wurf ein Pärchen. Dieses wirft ebenfalls alle vier Monate, erstmals im Alter von 4 Monaten.
