UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Dr. Moritz Weber
Dipl.-Math. Michael Wernet

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2012/2013

Blatt 8 Abgabetermin: Freitag, 14.12.2012

Aufgabe 1 (3+4+3=10 Punkte)

Bestimmen Sie die Reihenwerte der folgenden Reihen:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(3^{-k}+\frac{1}{3^{k+1}}\right), \quad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}, \quad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(5^{-k}\frac{2^k+1+2^{-k}}{3}\right).$$

(*Hinweis: zu (b): Partialbruchzerlegung.*)

Aufgabe 2 (3+7=10 Punkte)

(a) Seien zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben und sei $l \in \mathbb{N}$ mit $a_n = b_n$ für alle $n > l$. Zeigen Sie: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge und $l \in \mathbb{N}$ gegeben so, dass $\sum\limits_{k=l}^{\infty} a_k$ konvergiert mit Reihenwert s. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert und bestimmen Sie den Reihenwert.

(*Hinweis: Sei $s_n = \sum\limits_{k=l}^{n} a_k$ für $n \geq l$ und $s_n = 0$ für $n < l$. Weiter sei $s'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Drücken Sie s'_n mit Hilfe von s_n aus.*)

Aufgabe 3 (1+1+2+2+2+2=10 Punkte)

Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren sogar absolut, welche divergieren? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils.

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^4}{k^4+2k+1}, \quad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3+2k^2+4k+1}{k^5+8k^3+k+4}, \quad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2^k)}{2^k},$$

$$(d)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k^2+1}, \quad (e)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}, \quad (f)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k!}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(2+4+4=10 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Folgern Sie daraus, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

(b) Sei $q < 1$ und sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, d.h. beweisen Sie das Quotientenkriterium.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass $|a_n| \leq |a_0| q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und benutzen Sie das Majorantenkriterium.)

(c) Geben Sie eine positive, monoton fallende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine positive Nullfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, so dass die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$$

divergieren.
