UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020

Blatt 1
Abgabe: Dienstag, 29. Oktober 2019, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

Sie dürfen Ihren Lösungsvorschlag in Kleingruppen von bis zu drei Studierenden abgeben. Es ist nicht gestattet, dass einzelne Studierende zwischen verschiedenen Kleingruppen hin und her wechseln. Entscheiden Sie sich im Falle einer Gruppenabgabe bitte einmalig für eine Kleingruppe und behalten Sie diese über das Semester bei. Gruppenübergreifende Abgaben sind nicht gestattet, d.h. alle Abgabepartner müssen die gleiche Übung besuchen.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Im Orbitalmodell werden die Elektronen in der Hülle eines Atoms durch vier *Quantenzahlen* beschrieben, nämlich durch die *Hauptquantenzahl* $n \in \mathbb{N}$, die *Nebenquantenzahl* $\ell \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, die *magnetische Drehimpulsquantenzahl* $m_\ell \in \{-\ell, \dots, \ell\}$, sowie die *magnetische Spinquantenzahl* $m_s \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, wobei sich zwei verschiedene Elektronen in der Hülle gemäß dem *Pauli-Prinzip* in mindestens einer dieser vier Quantenzahlen unterscheiden müssen.

(a) Die Hauptquantenzahl legt die Elektronenschale fest. Begründen Sie, dass die maximale Anzahl der Elektronen, die auf der n-ten Elektronenschale Platz finden, gegeben ist durch den Ausdruck

$$2\sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1).$$

(b) Zeigen Sie unter Verwendung geeigneter Formeln aus der Vorlesung, dass der Ausdruck in (a) den Wert $2n^2$ hat.

Aufgabe 2 (10 Punkte + 5 Zusatzpunkte*)**.** Die Mathematik ist eine exakte Wissenschaft. Sie verwendet eine präzise Sprache und stützt ihre Aussagen auf strenge Beweise. In der Vorlesung wurde bereits diskutiert, dass es unterschiedliche Beweismethoden gibt. Dies wollen wir in dieser Aufgabe anhand eines weiteren Beispiels veranschaulichen; wir betrachten dazu die folgende

BEHAUPTUNG: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$

bitte wenden

(a) Verifizieren Sie die Behauptung für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ durch direktes Nachrechnen.

(b)* Beweisen Sie die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ durch *vollständige Induktion.*

(c) Bestätigen Sie, dass $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, und geben Sie damit einen *direkten Beweis* der obigen Behauptung.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Wir betrachten die beiden Teilmengen A, B von $\mathbb{N}$, die definiert sind durch

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid (n \leq 15) \wedge (n > 5)\} \quad \text{und} \quad B := \{n \in \mathbb{N} \mid (n \text{ ist ungerade}) \wedge (n \leq 20)\}.$$

Geben Sie die folgenden Mengen durch Auflisten ihrer Elemente an:

(a) A

(b) B

(c) $A \cap B$

(d) $A \cup B$.

(e) $A \setminus B$

(f) $B \setminus A$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 4 - x^2.$$

(a) Begründen Sie, warum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weder injektiv noch surjektiv ist.

(b) Finden Sie ein möglichst großes Intervall I in $\mathbb{R}$, für das die Einschränkung von f auf I injektiv ist.

(c) Bestimmen Sie das Bild $f(I) := \{f(x) \mid x \in I\}$ des Intervalls I aus (b) unter der Funktion f. Handelt es sich dabei ebenfalls um ein Intervall?

(d) Begründen Sie, warum die Funktion $f : I \to f(I)$ bijektiv ist, und bestimmen Sie einen expliziten Ausdruck für ihre Umkehrfunktion.