UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020

Blatt 2
Abgabe: Dienstag, 5. November 2019, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

Aufgabe 1 (4+6 Punkte). (a) Wir betrachten die beiden Funktionen

$$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (x+1)^2 \qquad \text{und} \qquad g:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2x-1.$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ und $g \circ g$.

(b) Gegeben seien zwei Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Zeigen Sie: Sind f und g injektiv (bzw. surjektiv), dann ist auch ihre Komposition $g \circ f : X \to Z$ injektiv (bzw. surjektiv).

Aufgabe 2 (10 Punkte). Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$(x-2)^2 - 1 < 9 - (x-4)^2.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte + 5 Zusatzpunkte*). Ungleichungen spielen in der Mathematik eine fast noch wichtigere Rolle als Gleichungen. In dieser Aufgabe widmen wir uns zwei fundamentalen Ungleichungen, die zum Handwerkszeug eines jeden Mathematikers gehören.

(a) Für reelle Zahlen $a, b > 0$ definieren wir ihr *arithmetisches Mittel* $A(a,b) := \frac{a+b}{2}$ sowie ihr *geometrisches Mittel* $G(a,b) := \sqrt{ab}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = A(a,b) - G(a,b)$$

gilt, und leiten Sie damit die *Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel* $A(a,b) \geq G(a,b)$ her.

(b)* Geben Sie einen geometrischen Beweis für die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel. Verwenden Sie dazu den aus der Schule bekannten Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke sowie den Satz des Thales.

bitte wenden

(c) Für $a, b > 0$ definieren wir ferner das *harmonische Mittel* $H(a,b) := \frac{2ab}{a+b}$. Rechnen Sie nach, dass

$$H(a,b) = \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} \qquad \text{und} \qquad G(a,b) = G\big(H(a,b), A(a,b)\big).$$

Folgern Sie daraus mithilfe von (a) die *Ungleichung vom harmonischen und geometrischen Mittel* $G(a,b) \geq H(a,b)$.

Aufgabe 4 (5+5 Punkte)**.** Mit $\mathbb{R}^2$ bezeichnen wir die Menge aller geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$, d.h. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$; die Elemente von $\mathbb{R}^2$ lassen sich als Punkte in einem x-y-Koordinatensystem veranschaulichen.
Betrachten Sie die Teilmengen A, B und C von $\mathbb{R}^2$, die gegeben sind durch

$$A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x-y| \leq 1\big\} \qquad \text{und} \qquad B := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x+y| < 1\big\},$$

sowie

$$C := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x| + |y| \leq 1\big\}.$$

(a) Stellen Sie die Mengen A und B in einem gemeinsamen x-y-Koordinatensystem dar.

(b) Begründen Sie, dass $A \cap B = C$.