UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020

Blatt 3
Abgabe: Dienstag, 12. November 2019, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

Aufgabe 1 (5+5 Punkte). (a) An einem Sektempfang nehmen n Personen teil. Zur Eröffnung des Empfangs stößt jeder Gast mit allen anderen Gästen genau einmal an. Wie oft kann man dann das typische Gläserklirren hören?

(b) An einem Tanzkurs nehmen n Frauen und n Männer teil. Wie viele Möglichkeiten gibt es, n gemischte Tanzpaare zusammenzustellen?

Aufgabe 2 (5+5 Punkte). Ein Passwort soll mit vier verschiedenen Großbuchstaben von A bis Z (d.h. ohne Umlaute) beginnen, gefolgt von drei bis fünf Ziffern zwischen 0 und 9.

(a) Wie viele solcher Passwörter gibt es insgesamt?

(b) Wie viele Passwörter davon enthalten die Zeichenfolge „A1“?

Aufgabe 3 (3+4+3 Punkte). Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Wie viele Funktionen $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ gibt es?

(b) Wie viele injektive Funktionen $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ gibt es für $m \leq n$? Welches Ergebnis erhalten Sie im Fall $m = n$?

(c) Die Frage nach surjektiven Funktionen ist ungleich komplizierter. Man kann zeigen (was Sie nicht tun müssen!), dass für $m \geq n$ die Anzahl aller surjektiven Funktionen $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ gegeben ist durch den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m.$$

Bestätigen Sie dieses Ergebnis für $m = 3$ und $n = 2$.

bitte wenden

Aufgabe 4 (5+5 Punkte + 5 Zusatzpunkte*)**.** Die Binomialkoeffizienten gehören zu den prominentesten Zahlen in der Kombinatorik. Sie treten in den Lösungen der unterschiedlichsten Zählprobleme auf und besitzen zahlreiche überraschende Eigenschaften. In dieser Aufgabe wollen wir uns exemplarisch mit der sogenannten *Vandermondesche Identität* beschäftigen: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq m + n$ gilt[1]

$$\sum_{p=0}^{k} \binom{m}{p} \binom{n}{k-p} = \binom{m+n}{k}.$$

(a) Bestätigen Sie die Vandermondesche Identität im Fall $m = 3$ und $n = 4$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ durch direktes Nachrechnen.

(b) Nutzen Sie Satz 5.7 der Vorlesung, um einen kombinatorischen Beweis der Vandermondeschen Identität zu geben.

Tipp: Eine Menge mit $m + n$ Elementen lässt sich in eine m-elementige und eine n-elementige Menge zerlegen.

(c)* Zeigen Sie mithilfe des Binomischen Satzes (Satz 5.9 der Vorlesung), dass

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{p=0}^{k} \binom{m}{p} \binom{n}{k-p} \right) x^k$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt, und geben Sie damit einen weiteren Beweis der Vandermondeschen Identität.

Tipp: Wenden Sie den Binomischen Satz auch direkt auf $(1 + x)^{m+n}$ an und vergleichen Sie anschließend die Koeffizienten von x^k in beiden Ergebnissen.

[1] Wir vereinbaren, dass $\binom{n}{k} = 0$, falls $k > n$.