UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I

Wintersemester 2019/2020

Blatt 4

Abgabe: Dienstag, 19. November 2019, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

Aufgabe 1 (5+5 Punkte). (a) Bestimmen Sie den Realteil, den Imaginärteil, die komplex konjugiert Zahl sowie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen:

$$3\mathrm{i}+4, \qquad (1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}), \qquad (1+3\mathrm{i})^2, \qquad \frac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden quadratischen Gleichung

$$z^2+z+1=0$$

über der Grundmenge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen und weisen Sie nach, dass alle Lösungen auf der Einheitskreislinie $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ liegen.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Skizzieren Sie (mit Begründung) die Teilmengen

$$H := \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{2i}\right) > 0 \right\} \qquad \text{und} \qquad C := \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 \right\}$$

der komplexen Zahlenebene.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $C = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$.

Aufgabe 3 (3+7 Punkte). (a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $re^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r>0$ und $\varphi\in[0,2\pi)$ dar:

$$1+\mathrm{i}, \qquad e^{\mathrm{i}\frac{7}{2}\pi}, \qquad (1+\mathrm{i})^{100}$$

(b) Bestimmen Sie für die beiden quadratischen Gleichung

$$z^2+2\mathrm{i}z-2=0 \qquad \text{und} \qquad z^2+2z-2\mathrm{i}+1=0$$

jeweils die Lösungsmenge über der Grundmenge $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte). Wir betrachten ein Polynom p vom Grad n mit reellen Koeffizienten, d.h. p ist von der Form

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Zeigen Sie: Ist $z\in\mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von p.