UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaftler I
Wintersemester 2019/2020

Blatt 5
Abgabe: Dienstag, 26. November 2019, 10:15 Uhr
in die Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2.5

Aufgabe 1 (6 + 4 Punkte). (a) Untersuchen Sie jeweils, ob die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{4n^3+2n^2+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n^2-23n+12}{1-4n^3-3n^5} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+2n-42}{n^3+1}$$

existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(b) Weisen Sie nach, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

existiert, und bestimmen Sie diesen.

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte). In Beispiel 7.3 (1) der Vorlesung haben wir ein iteratives Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel $\sqrt{2}$ kennengelernt. Dieses Verfahren, das sogenannte *Heron-Verfahren*, lässt sich derart verallgemeinern, dass damit auch $\sqrt{a}$ für $a \geq 0$ berechnet werden kann.

(a) Man kann zeigen (was Sie nicht tun müssen!), dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die rekursiv definiert wird durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

für jeden beliebigen Startwert $x_1 > 0$ konvergiert. Folgern Sie aus dieser Tatsache, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

(b) Ferner kann man zeigen (was Sie wiederum nicht tun müssen!), dass für die Rekursion in (a) die „Fehlerabschätzung"

$$|x_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2x_{n-1}x_n^2}\left(x_{n-1}x_n - a\right)^2 \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

gilt. Bestimmen Sie damit eine rationale Approximation von $\sqrt{3}$ mit einem Fehler von maximal 10^{-6}.

bitte wenden

Aufgabe 3 (4 × 2,5 Punkte)**.** Geben Sie je ein Beispiel für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen an, sodass

(a) zwar keine der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dafür aber $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(b) keine der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, jedoch $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und den Grenzwert 2 hat.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Nullfolge* (d.h. konvergent mit Grenzwert 0) ist und $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.

(d) beide Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, während $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Grenzwert hat.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (5 + 5 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie, dass die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^k}{2^k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

konvergieren, und bestimmen Sie jeweils den Wert der Reihe.

Tipp: Für die zweite Reihe können Sie Aufgabe 2 von Blatt 1 verwenden.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Zeigen Sie, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist, die nach oben durch 2 beschränkt ist. Folgern Sie daraus die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Tipp: Für den Nachweis der Beschränktheit von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeigen Sie zunächst, dass

$$S_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

gilt, und verwenden Sie anschließend Aufgabe 2 von Blatt 1.